

# Notions de transfert thermique par convection

par **Jacques HUETZ**

*Docteur ès Sciences*

*Directeur de Recherche au Centre National de la Recherche Scientifique*

*Délégué du Département Énergétique*

*Professeur à l'École Centrale des Arts et Manufactures*

et **Jean-Pierre PETIT**

*Docteur ès Sciences*

*Maître de Conférences à l'École Centrale des Arts et Manufactures*

<b>1. Préambule</b> .....	A 1 540 - 2
<b>2. Généralités</b> .....	— 3
2.1 Équations .....	— 3
2.2 Hypothèses .....	— 5
<b>3. Stationnarité. Conditions aux limites. Hypothèse de Newton. Température de mélange</b> .....	— 6
3.1 Stationnarité et régimes d'écoulement .....	— 6
3.2 Conditions aux limites .....	— 6
3.3 Hypothèse de Newton .....	— 7
<b>4. Mise en œuvre de l'hypothèse de Newton</b> .....	— 7
4.1 Température caractéristique .....	— 7
4.2 Adimensionnement et nombres caractéristiques .....	— 9
4.3 Commentaires .....	— 11
<b>5. Limites de la similitude. Généralités sur le nombre de Nusselt</b> .....	— 12
5.1 Classes irréductibles en convection forcée .....	— 13
5.2 Classes irréductibles en convection naturelle .....	— 15
5.3 Expressions du nombre de Nusselt. Généralités .....	— 16
<b>6. Expressions numériques du nombre de Nusselt</b> .....	— 17
6.1 Convection forcée externe .....	— 17
6.2 Convection forcée interne .....	— 18
6.3 Convection naturelle externe .....	— 29
6.4 Convection naturelle interne .....	— 31
6.5 Convection mixte externe .....	— 36
6.6 Convection mixte interne .....	— 39
<b>7. Annexe 1 : équation de l'énergie thermique dans un milieu déformable</b> .....	— 40
8. Annexe 2 : adimensionnement .....	— 40
8.1 Choix du système de référence .....	— 40
8.2 Signification physique de la vitesse de référence en convection naturelle .....	— 41
<b>9. Annexe 3 : cas particulier de la convection</b> .....	— 41
9.1 Généralités .....	— 41
9.2 Expressions du nombre de Nusselt .....	— 42
9.3 Influence des conditions aux limites .....	— 43
9.4 Diffusivité thermique turbulente .....	— 43
<b>Références bibliographiques</b> .....	— 46

On appelle **convection** la recherche du champ de vitesse et de température dans un milieu matériel dont les différentes parties sont en mouvement les unes par rapport aux autres. Par **milieu matériel**, nous entendons un fluide (gaz ou liquide) homogène et isotrope. Quatre principales classes de milieux couramment employés dans l'industrie ne relèvent pas de ce critère et doivent donc faire l'objet d'articles séparés. Ce sont :

- les **transferts et les écoulements diphasiques** se limitant en général à un mélange d'un fluide et de sa vapeur, ou d'un fluide et d'un gaz ;
- les **transferts dans les fluides dits complexes**, le terme recouvrant l'ensemble d'un liquide et de particules qui sont entraînées par lui (beaucoup de fluides sont dans ce cas-là en génie chimique ou en agroalimentaire) ;
- les **lits fluidisés entraînés**, si les particules solides ont un mouvement d'ensemble, ou les **lits fluidisés fixes** : bien que mobiles, les particules ont une vitesse moyenne d'entraînement nulle ; ces lits fluidisés relèvent à la fois du fluide complexe et du fluide diphasique ;
- le **transfert dans les milieux poreux**, ceux-ci se distinguant des précédents par le fait que les particules solides forment un réseau indéformable, donc fixe, dans les porosités duquel circule un fluide.

Délimitant ainsi ce que nous traiterons sous le titre **convection**, on s'apercevra assez vite, au niveau de l'établissement des équations, que la convection n'introduit rien de fondamentalement différent de ce que l'on connaît déjà, grâce à la conduction et à la **mécanique des fluides**. Cette dernière nous donne le champ de vitesse d'un fluide, auquel se superpose un problème de **conduction dans un milieu déformable** dont on connaît les lois et les vitesses de déformation par la solution préalable d'un problème de mécanique.

Si, fondamentalement, la **convection** n'est donc que la **conduction dans un fluide déformable**, la résolution est généralement beaucoup plus compliquée, surtout si, comme c'est le cas général, l'équation qui détermine les quantités de mouvement et celle qui permet le calcul des flux thermiques sont couplées, ce qui implique pratiquement des calculs itératifs.

## 1. Préambule

La conception de l'article sur la convection est très différente de celle de l'article sur la conduction. Dans ce dernier cas, il faut déterminer l'ensemble du champ de température en fonction du lieu et du temps dans l'ensemble du solide. Cela s'opère en **trois étapes**.

■ La solution générale de l'équation de la chaleur s'obtient en une **première étape** par des résolutions analytiques ou, dans la plupart des cas, par des résolutions numériques.

■ Une partie des constantes d'intégration se détermine lors d'une **deuxième étape** par la considération des conditions thermiques imposées aux limites. Cela suffit en conduction stationnaire ( $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ), ce dernier cas se présentant souvent comme la solution asymptotique, quand le temps  $t \rightarrow \infty$ , d'une solution de régime transitoire.

■ Si l'on calcule le régime transitoire, une **troisième étape** est nécessaire ; elle prend en compte les conditions initiales de température, donc de flux, dans l'ensemble du matériau siège du transfert de chaleur.

Rien de tel en convection pour plusieurs raisons ; nous citerons les deux principales.

■ La raison importante est que nous n'envisagerons ici la convection, c'est-à-dire le transfert de l'énergie thermique dans et par un fluide déformable, qu'en **régime stationnaire**. En fait, turbulence et stationnarité sont incompatibles et on restreindra la stationnarité aux seules valeurs moyennes (dans le temps) des différentes variables extensives et intensives qui interviennent.

■ Une autre simplification considérable vient du but que l'on poursuit. Obtenir le champ de température en conduction était indispensable, ne serait-ce que pour connaître les déformations et les contraintes dues aux dilatations différentielles dans le solide. Mais dans un fluide, l'exigence de connaître le transfert, dans et par un fluide, va se borner au seul processus de transfert par le fluide, c'est-à-dire par l'intermédiaire des parois solides le limitant de son environnement.

Dans le solide en contact, comme dans le fluide, les flux peuvent donc s'écrire **à la paroi** :

$$\lambda_s \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_{ps} = \lambda_f \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_{pf} = \varphi_p$$

avec  $n$  normale à la paroi,

tandis que l'on aura la continuité des températures :

$$(T_s)_{pM} = (T_f)_{pM}$$

avec  $(T_s)_{pM}$  température du solide en un point M de la paroi,

$(T_f)_{pM}$  température du fluide en ce même point.

Autrement dit, les résistances de contact solide-solide dont l'importance est si grande en conduction, n'existent pas (sauf cas exceptionnel) dans le contact solide-fluide.

Dans ces conditions, il apparaît actuellement dans beaucoup de cas industriels comme superfétatoire de calculer le champ de température dans tout le fluide, pour n'en retenir que le gradient de température aux seules parois.

Aussi, une simplification sans aucune justification d'ordre fondamental, exclusivement phénoménologique, établit-elle une relation à la paroi :

$$\varphi_p = h(T_p - T_M)$$

avec  $h$  coefficient d'échange convectif,

$T_M$  température globalisante destinée à moyenniser, suivant des critères à définir, l'ensemble du champ de température dans le fluide, champ qu'il n'est donc plus nécessaire de calculer point par point.

L'essentiel de la convection pour l'ingénieur consiste donc :

- d'une part, à définir puis à calculer  $T_M$  ;
- d'autre part, à calculer  $h$  par le biais du passage par des nombres caractéristiques (ici le nombre de Nusselt), légère complication comme tribut d'une généralisation des résultats.

Le lecteur ne s'étonnera donc pas si l'adoption d'hypothèses beaucoup plus phénoménologiques entraîne, pour la convection et par rapport à la conduction, un exposé beaucoup plus dépouillé en équations et en procédés mathématiques rigoureux de résolution. Si l'on y ajoute que la plupart des écoulements convectifs industriels sont turbulents et que la théorie de la turbulence constitue encore un des problèmes de physique du transfert non complètement résolus, on ne s'étonnera plus qu'un certain empirisme marque encore les corrélations qui déterminent les transferts convectifs.

Le lecteur remarquera aussi que tout l'article traite de l'échange thermique à la paroi commune entre **un solide et un fluide**. Cela suffit par exemple pour connaître les conditions convectives à la limite d'un solide où l'on étudie la conduction. Mais, très fréquemment, se présente l'obligation de transférer de l'énergie thermique **d'un fluide à un autre**. C'est le domaine, immense quant aux applications, des **échangeurs** où la paroi solide n'a qu'un rôle de séparation physique des deux fluides. La présence de cette paroi dont le rôle thermique reste très effacé se paie en général de multiples ennuis : vibration, corrosion, support d'encrassement par du tartre, des suies, etc. Mais cela est un autre problème.

Thermiquement, retenons simplement que l'on aura seulement à utiliser deux fois les notions exposées dans la suite de cet article : la première, pour étudier le transfert convectif fluide 1 - paroi, la seconde pour étudier le transfert convectif paroi - fluide 2.

Essentiellement, cet échangeur n'est que la mise en série de deux résistances thermiques convectives dont on sait calculer les inverses, c'est-à-dire les conductances  $h_1$  et  $h_2$ . D'où la notion de **coefficient d'échange global**  $H$  entre les deux fluides de l'échangeur, pour une même valeur des surfaces mouillées par 1 et par 2 :

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \mathcal{R}$$

De plus, les surfaces de contact solide - fluide 1 et solide - fluide 2 n'ont aucune raison d'être égales comme le montre la figure 1. On tentera d'accroître la surface d'échange du fluide pour lequel le coefficient  $h$  est le plus faible.

Mais l'aspect **système** d'un échangeur par la variété des configurations possibles entre les deux fluides justifie un article spécifique.

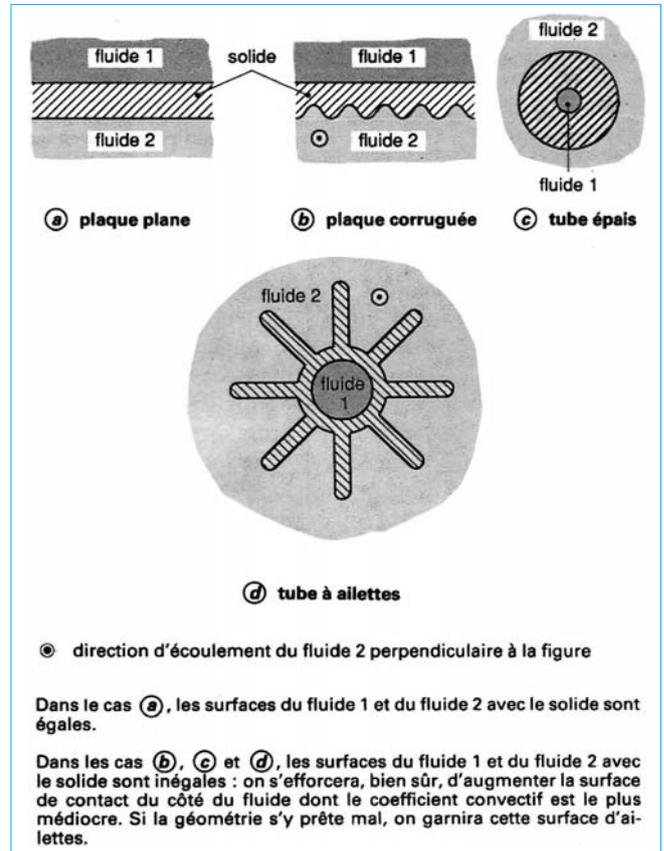


Figure 1 - Quelques exemples de configuration élémentaire dans un échangeur

## 2. Généralités

### 2.1 Équations

Si l'on se réfère aux équations de conservation de l'énergie qui, jointes à une équation d'état concernant le fluide, constituent le matériel à la base de toute l'étude de transfert vue sous l'angle macroscopique, on a toujours **l'équation de conservation de l'énergie thermique locale** que nous utilisons seule dans toute la conduction, à savoir :

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = P - \nabla \cdot \varphi \quad (1)$$

avec  $P$  puissance thermique produite au sein du fluide par unité de volume,

$\varphi$  flux surfacique.

Cette équation est unique pour deux inconnues  $T$  et  $\varphi$ . L'introduction d'une hypothèse purement phénoménologique à savoir l'hypothèse de Fourier :

$$\varphi = -\lambda \nabla T$$

permet d'écrire :

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = P + \nabla \cdot \lambda \nabla T \quad (2)$$

qui se simplifie en :

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = P + \lambda \nabla^2 T \quad (3)$$

dans le cas particulier d'un milieu homogène, isotrope où, de plus,  $\lambda$  reste constant en fonction de la température, du lieu et du temps. Mais même si l'on conserve ces hypothèses restrictives pour un fluide, l'écriture de l'équation unique de conservation de l'énergie, quelles que soient les formes sous lesquelles se présente cette dernière, ne peut plus se limiter à la seule conservation de l'énergie thermique, comme en conduction où n'apparaît aucune possibilité de transformation (délibérée ou incontrôlée) de cette dernière en une autre forme d'énergie puisqu'il n'y a que celle-là.

**Nota :** sauf dans le cas où intervient le rayonnement sous forme d'énergie électromagnétique et non plus thermique avec passages compliqués (et spontanés) d'une forme à l'autre.

L'intervention d'énergie radiative pour les milieux semi-transparents est cependant exclue de ces relations, sauf si on a à la faire intervenir dans  $P$ .

Les déplacements relatifs des éléments du fluide introduisent inévitablement de l'énergie mécanique sous ses deux aspects potentiel et cinétique.

Symétriquement de ce qu'il advient en conduction, admettons que le fluide en mouvement ne possède que cette forme d'énergie mécanique à l'exclusion de toute énergie thermique, par exemple parce que ce fluide reste isotherme. La conservation de l'énergie mécanique s'exprime, pour un fluide parfait dans un champ de force, par le théorème de Bernoulli dont l'expression, applicable à chaque élément de volume du fluide, s'écrit :

$$\frac{\rho V^2}{2} + p + \rho g = 0$$

où  $\rho$  et  $g$  sont supposés être des constantes en fonction du temps et de l'espace.

Comme il n'y a aucune raison, *a priori*, qu'une fraction de l'énergie thermique dans le cas général du fluide anisotherme ne se transforme en énergie mécanique et *vice versa*, l'équation de conservation de l'énergie doit maintenant s'écrire sous la forme de deux équations :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\rho V^2}{2} + p + \rho g &= 0 \\ \rho c_p \frac{dT}{dt} &= P + \lambda \nabla^2 T \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

avec des couplages possibles entre énergie thermique et énergie mécanique, par le biais des variations d'ordre physique qu'une des formes d'énergie introduit dans les paramètres qui gouvernent l'autre. Le processus physique de la dilatation, par exemple, crée des variations de  $\rho$  avec la température, variations inexistantes pour un fluide isotherme : mêmes conclusions pour les variations de  $\lambda$  et de  $c_p$  en  $p$  ou  $T$ .

Dans les fluides réels, la situation est encore plus délicate car, comme on le sait, la conservation de l'énergie mécanique est illusoire : spontanément, une partie de cette énergie disparaît sous forme d'énergie thermique. L'équation (1) reste valable à condition de comptabiliser dans  $P$  cette dissipation d'énergie mécanique en énergie thermique. Encore faut-il, bien entendu, savoir la calculer : c'est l'affaire du mécanicien des fluides chez lequel cette fraction de  $P$  est plus connue sous la désignation de **fonction de Rayleigh**.

Néanmoins, cette forme globale de la conservation de l'énergie (4) est peu utilisée par les mécaniciens des fluides, ces derniers préférant parler non d'énergie mais de quantité de mouvement par application directe du théorème fondamental de la mécanique qui suit.

**Théorème**

La dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique de l'élément de volume est égale à la résultante des forces extérieures sur ce même élément.

Ce théorème, appliqué à la conservation de l'énergie mécanique de l'élément de volume (Bernoulli), donne :

$$\rho V \frac{dV}{dt} = -\nabla p \frac{\partial r}{\partial t} + \rho g \frac{\partial r}{\partial t} \quad (5)$$

Comme  $\partial r / \partial t$  est précisément la vitesse dans un repère lagrangien, d'une manière générale (5) s'écrit :

$$\rho \frac{dV}{dt} = -\nabla p + \rho g \quad (6)$$

(relation que l'on sait **inexacte** pour un fluide réel donc visqueux) ; on calcule directement les forces appliquées à l'élément de volume et qui résultent de la viscosité. Nous renvoyons ici au traité de mécanique des fluides qui établit le tenseur des contraintes sur un élément de volume  $dx dy dz$ , l'effort tangentiel sur cet élément s'écrivant :

$$\left. \begin{aligned} \nabla(\mu \nabla u) + \nabla \left( \frac{\mu \partial V}{\partial x} \right) &\text{ en } x \\ \nabla(\mu \nabla v) + \nabla \left( \frac{\mu \partial V}{\partial y} \right) &\text{ en } y \\ \nabla(\mu \nabla w) + \nabla \left( \frac{\mu \partial V}{\partial z} \right) &\text{ en } z \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

avec  $\mu$  coefficient de viscosité du fluide.

Soulignons toutefois que ces expressions ne sont valables que dans les régions de l'écoulement où le régime est laminaire.

Dans le cas du régime **turbulent**, l'usage s'est répandu parmi les utilisateurs de remplacer le paramètre physique  $\mu$  ou plutôt le quotient  $\nu = \mu/\rho$  par  $\epsilon_M$ , diffusivité mécanique turbulente pour les quantités de mouvement.

Ce nouveau paramètre dépend tout à la fois des propriétés physiques du fluide et de la manière dont on s'en sert, c'est-à-dire des **caractéristiques locales de la turbulence**. Autant dire que la résolution de l'équation de l'énergie mécanique, perturbée par le terme de viscosité, devient tout à la fois beaucoup plus imprécise et difficile,  $\epsilon_M$  étant une fonction du lieu dans l'écoulement, de la géométrie et de la vitesse moyenne de ce dernier, au lieu d'être comme  $\nu$  une valeur bien définie du fluide donné que l'on utilise, valeur très souvent assimilable du reste à une constante dans les écoulements laminaires.

Terminons cette incursion dans le domaine de la mécanique des fluides par deux remarques.

■ **Première remarque :** elle concerne des ordres de grandeur dont l'utilisateur doit être bien pénétré.

$\mu$  varie en fait avec la pression (pour les liquides seulement) et avec la température.

Une variation du simple au double s'obtient pour l'air en passant de 300 à 900 K, pour l'eau en passant de 373 à 331 K. Mais des turbulences très modérées font passer de la valeur de  $\nu$  en laminaire à celle de diffusivités  $\epsilon_M$  aisément 40 ou 100 fois supérieures.

■ **Seconde remarque :** dans tout écoulement turbulent confiné par des parois (ce qui excepte les jets libres, les panaches, les écoulements en canaux, etc.), il existe toujours au voisinage de la paroi une *sous-couche* de faible épaisseur où l'écoulement reste visqueux et où l'effort tangentiel à cette paroi s'écrit :

$$\tau_p = -\mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_p \quad (8)$$

avec  $\left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_p$  gradient de vitesse à la paroi,  
y direction de la normale.

Encore faut-il pouvoir définir une **normale locale**, ce qui est immédiat pour une paroi lisse, délicat pour une paroi rugueuse ou qui est devenue telle au cours de l'utilisation (corrosion, dépôt de substances parasites, etc.). Le critère d'échelle à prendre en considération est l'amplitude du relief de la paroi comparée à l'épaisseur de la sous-couche laminaire.

Quoi qu'il en soit de ce rappel très bref et très orienté de mécanique des fluides, l'équilibre des forces, agissant sur l'élément de volume en écoulement, peut finalement s'écrire sous la forme de l'équation dite de Navier-Stokes :

$$\rho \frac{dV}{dt} = -\nabla p + \rho g + \mu \nabla^2 V \quad (9)$$

La solution de l'équation (9) donne le champ de vitesse, éventuellement fonction du temps, dans tout l'écoulement du fluide considéré comme isotherme ou, tout au moins, qui l'est suffisamment pour que les échauffements, produits par la dissipation spontanée d'une partie de l'énergie mécanique en énergie thermique par la viscosité, n'entraînent pas une variation sensible des propriétés physiques qui interviennent dans les équations, à savoir  $\rho$  et  $\mu$  (ou  $\varepsilon_M$ ).

Dans ces conditions, l'ensemble du système des équations qui caractérisent la convection se résume à une relation entre  $p$ ,  $\rho$  et  $T$  dite **relation d'état** :

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{dV}{dt} &= -\nabla p + \rho g + \mu \nabla^2 V \\ \rho c_p \frac{dT}{dt} &= P + \lambda \nabla^2 T \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\nabla \rho V \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

La deuxième et la troisième équation du système (10) n'apparaissent pas comme une complication supplémentaire par rapport à la seule équation de l'énergie thermique qui gouvernait la conduction pour les solides. L'équation de continuité exprime la conservation de cette forme d'énergie que constitue la matière ; on peut la sortir, indépendamment de toutes les autres formes, de l'équation qui exprime la conservation de l'énergie, simplement parce que la *forme matière* de l'énergie ne se transforme ni spontanément ni sur procédé en une forme différente ; elle se conserve donc (sauf dans les combustibles nucléaires en toute rigueur).

Quant à la relation entre  $T$ ,  $p$  et  $\rho$ , elle est d'une nature entièrement différente et caractérise les propriétés physiques du fluide considéré.

Admettre, comme en conduction,  $\rho = Cte$  et  $V = 0$  reviendrait à admettre une relation d'état particulière et à rendre superflue l'écriture explicite des équations de continuité et de Navier-Stokes.

La considération de ce système de quatre équations nous permet de définir les cas particuliers dont découlent les grandes classes de processus convectifs le plus souvent rencontrés dans la pratique industrielle.

## 2.2 Hypothèses

### 2.2.1 Première série d'hypothèses restrictives. Cas particulier de la convection forcée

■  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\rho$  sont des constantes.

**Nota** : il suffirait de dire  $\rho = Cte$ , la constance de  $\mu$  et de  $\lambda$  étant déjà incluse dans l'écriture du terme  $\lambda \nabla^2 T$  (équation de l'énergie thermique) ou dans celle de  $\mu \nabla^2 V$  (Navier-Stokes).

Dans  $P$ , puissance thermique dégagée, la dissipation visqueuse est faible devant les flux thermiques injectés aux parois ou les autres causes de production d'énergie thermique au sein du volume.

**Nota** : la production d'énergie thermique est pratiquement toujours positive. Tous les processus, dissipation visqueuse en tête, mais aussi effet Joule, fission, réaction chimique, combustion, couplage avec des champs électriques ou magnétiques, produisent de la chaleur. Les processus qui dégagent du froid au sein du volume sont exceptionnels ( $P$  négatif).

■ Le régime d'écoulement mécanique et le régime thermique sont stationnaires. Autrement dit,  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ .

Dans le cas des écoulements turbulents, instationnaires par définition, de par l'apparition de fluctuations aléatoires de la température et de la vitesse, cette hypothèse de stationnarité est limitée aux seules valeurs moyennes. Cette entorse, couramment admise cependant à l'instationnarité, rend les résultats beaucoup plus empiriques en régime turbulent qu'en régime laminaire.

Dans ces conditions, l'équation de Navier-Stokes, d'une part, l'équation de la conservation de l'énergie thermique, d'autre part, sont entièrement découplées. Le champ de vitesse du mécanicien des fluides, valable en toute rigueur pour le seul fluide isotherme, est réputé encore applicable à l'écoulement qui, dans les mêmes conditions mécaniques et géométriques, est anisotherme parce qu'il reçoit (algébriquement) par les parois ou génère en son volume des flux de chaleur.

Le problème convectif se résout alors en deux temps.

● Solution de l'équation de Navier-Stokes et détermination du champ de vitesse  $V(x, y, z)$ .

● Injection de ce champ de vitesse connu dans l'équation de la conduction, dont le développement donne :

$$\rho c_p \left[ \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \right] = P + \lambda \nabla^2 T \quad (11)$$

ou encore :

$$\rho c_p \left[ u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right] = P + \lambda \nabla^2 T \quad (12)$$

Les composantes  $u$ ,  $v$ ,  $w$  sont connues en chaque point et le terme  $\frac{\partial}{\partial t}$  est nul du fait de l'hypothèse de stationnarité  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$  de l'écoulement moyen.

Le schéma qui vient d'être exposé, conséquence de cette première série d'hypothèses, recouvre le domaine extrêmement vaste dans la pratique de la **convection forcée**.

### 2.2.2 Deuxième série d'hypothèses restrictives. Cas particulier de la convection naturelle

La stationnarité est conservée, mais  $\rho$  est maintenant une fonction de  $T$  que l'on exprimera par une équation d'état :

$$\rho = \rho_\infty [1 - \beta(T - T_\infty)]$$

On choisit en général une relation simple de linéarité entre  $\rho$  et  $T$  sans intervention de la pression.

En compensation de cette complication par rapport à la convection forcée, on admettra en revanche une simplification : les mouvements du fluide sont exclusivement provoqués par les forces d'Archimède résultant des variations thermiques de  $\rho$ , les différentes causes (pompes, ventilateurs, compresseurs) qui *forçaient* le mouvement dans la convection forcée étant désormais supprimées, ce qui rend nul le terme  $\nabla p$  [équation (9)].

C'est le domaine de la **convection naturelle** qui est régi par cet ensemble d'hypothèses.

**Nota** : convection naturelle : *free convection* dans les ouvrages anglo-saxons.

### 2.2.3 Cas général

Tout écoulement convectif, où le mouvement est dû à la fois aux forces d'Archimède dans le champ de pesanteur et aux effets provoqués par des moyens mécaniques, entre dans le cadre de la **convection mixte**.

### 2.2.4 Remarque

La résolution de tels problèmes est souvent plus difficile que cela ne paraît.

Les limites de ces trois domaines, c'est-à-dire la convection forcée (CF), la convection naturelle (CN) et la convection mixte, sont approximativement fixées par le *nombre de Richardson* qui tend vers zéro dans le cas de la CF et tend vers l'infini pour la CN :

$$Ri = \frac{g \beta L \delta T}{V^2} = \frac{Gr}{Re^2}$$

tant que le nombre de Reynolds peut conserver une signification, c'est-à-dire tant que la vitesse qui figure dans son expression n'est due qu'à la convection forcée.

**Nota :** voir plus loin la définition du nombre de Reynolds (§ 4.2.2) et du nombre de Grashof (§ 4.2.3).

## 3. Stationnarité. Conditions aux limites. Hypothèse de Newton. Température de mélange

### 3.1 Stationnarité et régimes d'écoulement

Nous voyons que la solution d'un processus convectif est gouvernée par un ensemble de quatre équations : l'équation d'état, l'équation de continuité (ou de conservation de la masse), l'équation de Navier-Stokes et l'équation de conservation de l'énergie thermique permettent de trouver le champ de vitesse et le champ de température dans un fluide en mouvement. La complication qui en résulte par rapport à la résolution de la seule équation de conservation de l'énergie thermique dans un corps indéformable immobile, où donc les variations d'énergie potentielle dans un champ de force (par exemple la pesanteur) n'existent pas plus que les variations d'énergie cinétique, est partiellement compensée par une limitation des études convectives au **mouvement stationnaire**  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ .

Mais cette simplification n'est concevable, en toute rigueur, qu'en régime d'**écoulement laminaire**.

On sait qu'en **régime turbulent** mécanique et thermique les variables intensives qui gouvernent le flux de quantité de mouvement et le flux d'énergie thermique peuvent s'écrire sous la forme d'une somme d'une valeur moyenne et d'une fluctuation aléatoire, donc fonction du temps, sous la forme :

$$\left. \begin{aligned} V &= \bar{V} + V' \\ T &= \bar{T} + T' \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\text{avec} \quad \int_0^{t_1} V' dt = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^{t_2} T' dt = 0 \quad (14)$$

les durées  $t_1$  et  $t_2$  étant choisies assez longues pour que les intégrales soient vérifiées. Ce sont les *échelles temporelles* de la turbulence mécanique et thermique.

L'hypothèse de stationnarité peut encore être appliquée aux **valeurs moyennes locales** (la moyenne s'entendant sur des temps

supérieurs à  $t_1$  ou  $t_2$ ) et non pas à des valeurs moyennes spatiales de la **vitesse** et de la **température** respectivement, car il est possible de s'arranger pour que ces valeurs moyennes restent stationnaires en régime turbulent.

Il n'en résulte pas moins que, sur le plan rigoureux des valeurs locales et instantanées, un régime turbulent est par essence même un **régime instationnaire**. La stationnarité que l'on s'efforce de réaliser dans la plupart des écoulements anisothermes industriels ne peut s'entendre que pour les *valeurs moyennées* dans le temps.

### 3.2 Conditions aux limites

Les quatre équations (10) du paragraphe 2, quelles que soient les simplifications que l'on introduit ( $\lambda$  constant, stationnarité  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ , etc.) ne peuvent être complètement résolues que si l'on connaît les **conditions aux limites**. S'agissant d'un écoulement anisotherme, celles-ci sont de deux ordres : mécanique et thermique.

#### ■ Conditions mécaniques

Elles sont particulièrement simples : au contact d'une paroi solide, le fluide a localement la même vitesse que le solide. C'est vrai tout aussi bien que la paroi soit fixe (tuyauteries classiques) ou mobile (aubages de turbine), que le fluide soit isotherme ou non. Les seules exceptions concernent les parois poreuses (mais alors le débit-masse n'est plus conservé entre ces parois) ou les écoulements des gaz raréfiés ou, plus exactement, de gaz dont le libre parcours moyen ( $\bar{\ell}$ ), très petit en général, commence à être de l'ordre de grandeur de la plus petite dimension du conduit où s'effectue l'écoulement.

#### Exemple de libre parcours moyen de l'air :

- air ambiant,  $\bar{\ell} = 5,7 \times 10^{-6}$  cm ;
- air à 100 km d'altitude,  $\bar{\ell} = 15$  cm .

On résumera en écrivant l'expression :

$$V_p = 0 \quad (15)$$

l'indice p désignant la paroi, la vitesse de cette dernière étant prise comme référence. Bien entendu, la paroi étant réputée imperméable au flux de masse, la composante de vitesse perpendiculaire à cette paroi y est nulle.

#### ■ Conditions thermiques

La paroi étant, cette fois, perméable au flux thermique, la valeur de ce dernier dépend des conditions thermiques imposées à cette paroi. Elles sont infiniment variées, mais **deux cas particuliers**, industriellement réalisables en première approximation, sont couramment envisagés.

- La **température de la paroi** est constante :  $T_p = Cte$  ; c'est ce qui est imposé à une plaque ou à un tube par exemple dont un côté limite un corps pur (ou un eutectique) en voie de changement d'état : les bouilleurs (eau  $\rightarrow$  vapeur) ou les condenseurs (vapeur  $\rightarrow$  eau) réalisent assez bien cette condition.

- Le **flux thermique surfacique imposé à la paroi** est, cette fois, constant :  $\varphi_p = Cte$ . Ce sera le cas d'une paroi refroidie par un fluide, mais dont une face est en contact avec un combustible nucléaire qui dégage un flux surfacique constant indépendant du lieu considéré sur cette paroi, ou encore d'un chauffage par une source radiative à haute température par rapport à cette paroi.

Deux remarques importantes sont cependant à noter à propos de ces deux cas particuliers souvent cités et employés.

- Les *écoulements anisothermes laminaires établis* sont sensibles quant aux résultats thermiques à ces différences de conditions aux limites. Les *écoulements turbulents* le sont beaucoup moins, au point que, dans la plupart des expressions donnant le transfert d'énergie thermique fluide-paroi, on peut se dispenser de préciser la nature des conditions aux limites, exception faite de quelques cas particuliers (écoulement de métaux fondus entre autres).

- La condition de *flux constant à la paroi* est pratiquement toujours un *apport d'énergie vers le fluide* qui se comporte donc comme un *réfrigérant*. Le cas inverse est beaucoup plus rare.

Citons cependant les condenseurs de machines thermiques embarquées dans les engins spatiaux où le refroidissement ne peut plus s'opérer que par rayonnement puisqu'il n'y a plus aucun milieu extérieur pour conduire ou convecter.

### 3.3 Hypothèse de Newton

On aperçoit maintenant le moyen théorique de résoudre complètement un problème de transfert d'énergie thermique dans un milieu déformable, compte tenu des conditions aux limites. On résout le système couplé des quatre équations principales ; ce n'est pas chose facile, même si on reste dans l'optique d'un régime stationnaire réalisable en laminaire, impossible en toute rigueur en régime turbulent ; le mieux que l'on puisse faire dans ce dernier cas est de réaliser au moins la stationnarité pour les valeurs moyennes.

Mais, est-il nécessaire de résoudre le problème aussi complètement et d'obtenir le champ de vitesse et de température partout dans le fluide ? Si on établissait ce dernier dans un solide, c'était aussi pour calculer les contraintes d'origine thermique dues aux dilatations différentielles. Rien de cela dans un fluide, sauf cas encore assez rares. (Le champ de température dans la première approximation convective est indispensable si l'on veut calculer les transferts couplés convection-rayonnement dans un fluide semi-transparent : fumées chaudes, gaz d'échappement). Or, ce qui importe en général, c'est de connaître le flux thermique qui passe à la paroi du fluide vers le solide, ou vers un autre fluide (non miscible au premier), s'il n'y a pas de paroi.

Une relation de linéarité flux-température est là encore utilisée comme en conduction : elle est purement phénoménologique, n'a pas de base autre que la confirmation expérimentale et s'écrit :

$$\varphi_p = h(T_p - T_M) \quad (16)$$

avec  $h$  coefficient de convection indépendant au moins directement de la température,

$p$  indice désignant la paroi,

$T_M$  une température unique globalisant toute la répartition de température dans l'ensemble du fluide.

Mais, bien entendu, au voisinage de la paroi, il y a deux hypothèses essentielles :

#### ■ Continuité des températures :

$$T_p \text{ dans le solide} = T_p \text{ dans le fluide}$$

Autrement dit, les phénomènes de **résistance de contact**, si essentiels entre deux solides surtout s'ils sont tous les deux bons conducteurs thermiques, **n'existent pas** entre un fluide et une paroi.

**Nota** : cette affirmation a cependant été remise en question quand il s'agit du contact entre un métal et un **métal liquide**.

#### ■ Continuité des flux :

$$\varphi_p = \lambda_s \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_{ps} = \lambda_f \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_{pf} \quad (17)$$

Ce sont donc les mêmes conditions qu'au contact de deux solides sans résistance de contact. Cette relation est toujours exacte, que l'écoulement soit laminaire ou turbulent. Nous verrons que, dans ce dernier cas,  $\lambda_f$  au sein du fluide doit aussi être remplacé par une valeur supérieure à  $\lambda_f$  et qui dépend localement de l'éloignement par rapport à la paroi ; mais il y a toujours au voisinage de cette dernière une mince sous-couche laminaire où l'on peut écrire l'expression précédente du flux surfacique avec  $\lambda_f$ .

En résumé et à la paroi :

$$\varphi_p = \lambda_s \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_{ps} = \lambda_f \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_{pf} = h(T_p - T_M) \quad (18)$$

Calculer tout le champ de température pour n'en déduire que  $\lambda_p \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_{pf}$  à la paroi est en général une solution superfétatoire.

Le problème essentiel de la convection, en admettant la validité de l'hypothèse de Newton, est double :

- définir et calculer  $T_M$  ;
- calculer  $h$ .

## 4. Mise en œuvre de l'hypothèse de Newton

Beaucoup d'écoulements convectifs industriels peuvent être représentés avec une précision suffisante par l'hypothèse (16).

Il reste à définir et à calculer la température globalisante  $T_M$  destinée à remplacer la connaissance locale du champ des températures, à la suite de quoi il faut calculer  $h$ . Mais là, une étape intermédiaire intervient encore avant ce calcul. Dans le but de généraliser les expériences confirmatives à plusieurs cas d'écoulements anisothermes *semblables*, on peut limiter ces dernières à quelques cas typiques ; on ne calculera cependant jamais les  $h$  directement. Par un **adimensionnement** judicieux, on définit quelques nombres caractéristiques (les nombres de Reynolds, de Nusselt, de Péclet, de Grashof, de Rayleigh, de Prandtl, etc.) et c'est en fonction d'eux et d'eux seuls que l'on exprimera la valeur de  $h$ .

### 4.1 Température caractéristique

#### 4.1.1 Écoulement entre deux plaques parallèles

Pour fixer les idées, prenons un écoulement bidimensionnel anisotherme entre **deux plaques planes parallèles**, distantes de  $\delta$  par exemple (figure 2).

Soit le profil des vitesses dans une section droite dont la profondeur dans le sens  $Oz$  est égale à l'unité.

À quoi s'intéresse le mécanicien si ce n'est au débit-masse de ce conduit ; celui-ci s'écrira :

$$\dot{Q}_{x_1} = \int_0^\delta \rho(y) u(y) dy = \delta \rho V_q \quad (19)$$

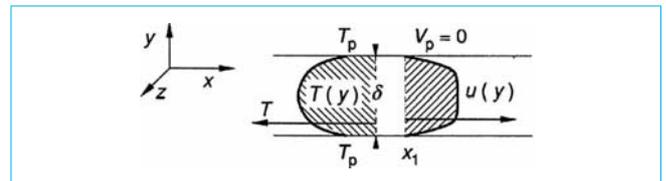


Figure 2 – Écoulement bidimensionnel anisotherme entre deux plaques parallèles : champs de vitesse et de température

Si, par ailleurs,  $\rho$  peut être considéré comme une constante dans toute la section droite  $x_1$ , on définit une **vitesse de débit**  $V_q$  qui, en la supposant appliquée à tous les petits volumes élémentaires de la section  $x = x_1$ , donnerait le même débit que la somme des débits élémentaires dus aux vitesses locales, toutes fonction de  $y$ . Notons dans ce cas, restreint à la mécanique des fluides isothermes en bidimensionnel, deux propriétés simplificatrices.

■ À la paroi, on sait déjà que la vitesse est nulle (par rapport à la vitesse de cette paroi).

■ Le débit-masse est constant d'une section  $x_1$  à une autre  $x_2$  à moins que le fluide ne passe à travers des parois poreuses.

La section droite étant désignée par  $A$ , dans un cas plus général que celui des deux plaques parallèles, on a :

$$\dot{Q} = (A \rho V)_{x_1} = Cte \text{ en } x$$

On a globalisé le profil de vitesse réel par une **vitesse de débit-volume**, uniforme dans la section et équivalente au profil de vitesse réel sur le plan du débit-masse qui, lui, est constant (équation de continuité).

Est-il possible d'envisager une simplification identique avec la température ? Quelle est la température globalisante qui, appliquée à tous les éléments fluides de la section, serait représentative de quelque chose ? Ce qui intéresse bien évidemment le thermicien énergétique, c'est le **débit d'enthalpie** dans la section :

$$\text{débit d'enthalpie} = \int_0^\delta \rho(y) c_p(y) u(y) T(y) dy \quad (20)$$

Nous voyons qu'à  $c_p$  près, ce débit est homogène au produit d'un débit-masse par une température. Il est fort tentant de diviser ce débit d'enthalpie par le débit-masse dont on connaît l'expression en fonction de  $V_q$  (19) et d'écrire, en admettant  $c_p$  constant, ce qui est très fréquemment le cas :

$$T_M = \frac{\int_0^\delta \rho(y) u(y) T(y) dy}{\int_0^\delta \rho(y) u(y) dy} \quad (21)$$

$T_M$  est la **température de mélange**, ainsi appelée car, si l'on recueille ce qui est passé par la section droite  $x$  dans l'unité de temps et que l'on place l'ensemble dans un calorimètre sans fuite thermique, on obtiendra au bout d'un temps suffisant un **fluide isotherme** à  $T_M$ . On peut accélérer le processus en mélangeant le fluide anisotherme recueilli dans le calorimètre, d'où l'expression de température de mélange.

### 4.1.2 Trois remarques indispensables

■ **Remarque 1** : cette température de mélange peut indifféremment être employée pour caractériser chaque écoulement avec ses vitesses élémentaires réelles ou un écoulement fictif dont tous les éléments à débit-masse identique auraient la même vitesse de débit  $V_q$ . On a donc doublement globalisé l'écoulement anisotherme en substituant au profil des vitesses une vitesse unique  $V_q$  et au profil des températures une température unique  $T_M$ .

■ **Remarque 2** : si le débit-masse est constant en  $x$ , le débit d'enthalpie ne l'est pas, bien entendu, puisque les parois sont thermiquement perméables.

$T_M$  est donc fonction de  $x$ ,  $A \rho V_q$  ne l'est pas.

Il n'y a aucune correspondance entre la condition mécanique aux limites ( $V_p = 0$ ) et les conditions thermiques qui peuvent être quelconques. Deux cas particuliers retiennent cependant souvent l'attention :

$$T_p = Cte \text{ ou } \varphi_p = Cte$$

Mais il faut bien percevoir que ce ne sont là que deux cas parmi une infinité d'autres. Néanmoins calculons l'allure de  $T_M$  en fonction de  $x$  dans chacun de ces deux cas. En effet, l'utilisateur verra ultérieurement que le  $h$  convectif est souvent constant en  $x$  tout au long de l'écoulement anisotherme tandis que, bien évidemment,  $T_M$  est une fonction de  $x$  : cette fonction est à calculer dans chaque cas. À titre d'exemple, nous établirons sa forme pour une géométrie fermée en se limitant à un tube, dont les sections droites, constantes de l'entrée (e) à la sortie (s), et séparées par la distance  $L$ , débitent la même masse.

●  $T_p = Cte$

Dans ce cas, et si  $h$  est constant, le bilan d'énergie thermique s'écrit :

$$A \rho c_p V_q \frac{\partial T_M}{\partial x} = -p_e h (T_M - T_p) \quad (22)$$

avec  $A$  section droite,

$p_e$  périmètre de la section supposé constant.

Comme  $T_p$  ne dépend pas de  $x$  par hypothèse (seul  $T_M$  en dépend) :

$$\frac{dT_M(x)}{T_M(x) - T_p} = -\frac{p_e h dx}{A \rho c_p V_q} \quad (23)$$

et en intégrant :  $\ln |T_M - T_p|_e^s = -\frac{p_e h L}{A \rho c_p V_q} \quad (24)$

$$\ln \frac{|T_M - T_p|_s}{|T_M - T_p|_e} = -\frac{p_e h L}{A \rho c_p V_q} \quad (25)$$

$$|T_M - T_p|_L = |T_M - T_p|_e \exp \left[ \frac{-p_e h L}{A \rho c_p V_q} \right] \quad (26)$$

la différence entre la température de mélange et la température de paroi décroît donc exponentiellement en  $x$  et, bien entendu, finit par rejoindre la température de paroi  $T_p$  imposée comme constante par hypothèse.

●  $\varphi_p = Cte$

La même relation de bilan thermique s'écrit maintenant :

$$\rho_e \varphi_p dx = A \rho c_p V_q \frac{dT_M}{dx} dx \quad (27)$$

ce qui donne :

$$T_M = \frac{\rho_e \varphi_p}{A \rho c_p V_q} x + Cte$$

Si  $\varphi_p > 0$ , la température de mélange croît linéairement en  $x$  et indéfiniment, amenant donc la destruction des matériaux constituant le contenant du fluide anisotherme. En général, quand le niveau thermique s'élève, l'hypothèse  $\varphi_p = Cte$  n'est plus vérifiée (échange radiatif avec un corps très chaud par exemple).

Le canal où circule le réfrigérant d'un réacteur nucléaire est néanmoins proche de cette condition  $\varphi_p = Cte$ , la fission dégageant un flux thermique assez peu sensible au niveau thermique et pratiquement constant le long du canal.

On voit donc couramment la condition aux parois  $\varphi_p = Cte$  entraîne de la part du concepteur des systèmes (un échangeur par exemple) une excellente fiabilité puisque toute diminution accidentelle du débit proportionnel à  $V_q$  entraîne une augmentation de température beaucoup plus rapide en  $x$  [équation (23)] donc aussi une augmentation de la température  $T_p$  de la structure. En effet, même si  $h$  restait constant :

$$h [T_M(x) - T_p(x)] = \varphi_p = Cte$$

$$\frac{dT_p}{dx} \text{ est donc égal à } \frac{dT_M}{dx}.$$

Or, nous verrons ultérieurement (§ 6) que  $h$  décroît si  $V_q$  décroît, ce qui aggrave encore la situation.

**Remarque 3 :** nous avons pris l'exemple d'une *géométrie fermée* (espace entre deux plaques parallèles infinies ou encore intérieur d'un tube). Les exemples d'objets placés dans un espace indéfini sont fréquents : une seule des deux plaques précédentes par exemple, placée parallèlement à un écoulement de grande dimension ou encore une aile d'avion.

Prenons l'exemple d'une **plaque unique** avec bord d'attaque en  $x=0$  (figure 3). En toute valeur de  $x>0$ , on trouvera, perpendiculairement à la plaque pour une valeur de  $y$  suffisante, une zone non perturbée où la température reste celle du courant isotherme avant l'introduction de la plaque chaude (ou froide). La zone où  $T$  évolue de  $T_p$  à  $0,99 T_\infty$  a une épaisseur faible devant celle où  $T$  reste constant et égal à  $T_\infty$  : l'intégration se fait maintenant entre zéro et l'infini, intervalle dans lequel  $T = T_\infty$  sauf dans la mince couche au voisinage immédiat du profil anisotherme.

La **température de mélange** est donc assimilable à la *température au loin* ou encore à la **température à l'infini dans le cas de géométries ouvertes**. Nous voyons entre autres une signification à ces géométries d'écoulement dites infinies. En fait, il existe forcément des parois limitant l'écoulement, mais situées dans une zone où l'obstacle (la géométrie ouverte) ne perturbe plus de façon appréciable ni la vitesse ni la température par rapport à ce que seraient ces deux valeurs en l'absence de l'obstacle.

## 4.2 Adimensionnement et nombres caractéristiques

### 4.2.1 Exemple de la plaque semi-infinie

Après  $T_M$ , la logique inciterait au calcul direct de  $h$ . En fait, une étape intermédiaire est nécessaire. Tout calcul de  $h$ , basé même partiellement sur des conditions purement théoriques, nécessite la confirmation expérimentale ; c'est dire qu'il faudrait autant d'expériences que de cas particuliers concernant soit les différentes géométries, soit les deux grandes classes d'écoulements (laminaire ou turbulent), soit encore les conditions aux limites thermiques dont nous avons vu qu'elles pouvaient être infiniment variées.

Des **relations de similitudes** permettent de regrouper toutes les expériences possibles sur un certain nombre de classes semblables, pour chacune desquelles une seule expérience confirmative est nécessaire. Le but est donc double :

- définir des classes d'écoulement anisotherme semblables et établir pour chacune d'elles la valeur correspondante de  $h$  ou, tout au moins, d'un groupement homogène à un nombre qui lui est lié et dont on pourra aisément et facilement l'extraire ;
- réduire le nombre de ces classes d'écoulement au nombre minimal où les résultats ne sont plus transposables d'une classe à une autre, mais aisément transposables à l'intérieur d'une même classe.

Cet adimensionnement peu pratiqué en Physique est très puissant en Mécanique, en Conduction (cf. les nombres de Biot, de Fourier). Bien qu'il repose sur des mathématiques (théorème de Vaschy-Buckingham), on choisit d'exposer la démarche sur un exemple, celui que nous avons déjà cité pour fixer les idées.

Soit à connaître le coefficient d'échange entre une plaque plane semi-infinie chauffée à température constante  $T_p$  et recevant parallèlement à elle-même un flux de fluide à la température non perturbée  $T_\infty$  et à la vitesse  $V_\infty$ . Les coordonnées sont  $x$  et  $y$ , les composantes de la vitesse  $u$  et  $v$  (figure 4). Il faut trouver :  $h(x)$ .

Qualitativement, la mécanique montre le développement d'une couche limite où la composante  $u$  évolue de 0 ( $y=0$ ) à  $0,99 V_\infty$  pour une épaisseur  $\delta(x)$  qui est l'épaisseur de la couche limite. On

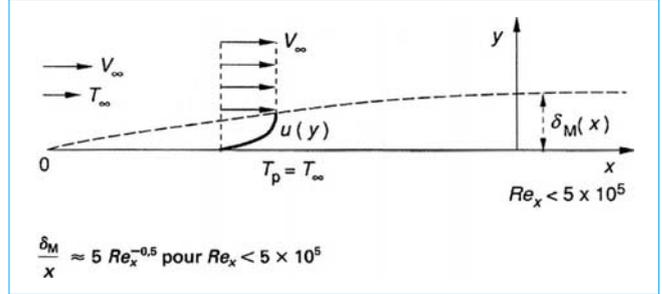


Figure 3 – Plaque plane semi-infinie placée parallèlement à un écoulement infini : aspect mécanique des fluides

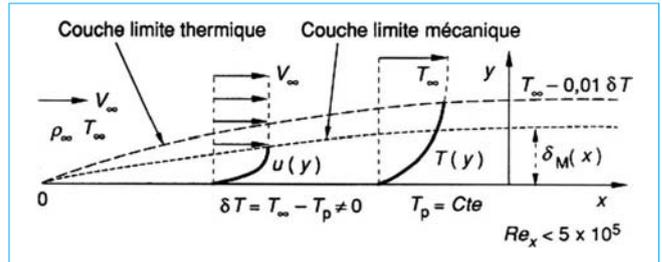


Figure 4 – Plaque plane semi-infinie (figure 3), mais avec une température de la plaque constante et différente de celle du fluide

peut définir de même une couche limite thermique, lieu des points où la température est  $-0,01 (T_p - T_\infty) + T_\infty$ .

Tout système d'unités repose sur le choix de trois grandeurs fondamentales, habituellement la longueur, la masse, le temps, soit dans le Système International (SI) le mètre, le kilogramme, la seconde. Mais rien n'oblige à un tel choix. Convenons de définir ici un système fondé sur la **longueur**, la **vitesse**, et la **pression**.

On choisira une valeur, dite de référence, et particulièrement représentative de chacune des trois valeurs fondamentales de ce système. Le choix des trois valeurs représentatives constitue un cas d'espèce laissant une large initiative dont il faut user pour rendre aussi simple que possible la résolution du problème envisagé (§ 7, 8 et 9).

Ici, pour la plaque plane, nous prendrons comme **grandeurs** :

- une longueur ;
- une vitesse ;
- une pression ;

et comme **valeurs de référence** :

- la *distance depuis le bord* d'attaque du point où l'on veut calculer  $h$ , soit  $x_1$  ;
- la vitesse non perturbée  $V_\infty$  ;
- la pression d'arrêt :

$$p = \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 \text{ (théorème de Bernoulli)}$$

**Nota :** certains auteurs préfèrent prendre comme distance l'épaisseur de la couche limite (*a priori* inconnue) en  $x$ , soit  $\delta(x)$ .

Thermiquement, il faut aussi se référer à une température (et non à une différence de température) caractéristique ; nous prendrons ici l'écart maximal :

$$\delta T = |T_p - T_\infty|$$

et nous définirons la température adimensionnée :

$$T^+ = \frac{T - T_p}{\delta T}$$

**Nota :** le signe + en exposant désignera toujours la variable adimensionnée.

Toutes les grandeurs peuvent être exprimées en fonction des trois grandeurs fondamentales (tout aussi bien que si l'on avait choisi longueur, masse, temps). On remplacera toutes les variables qui apparaissent dans les équations par des valeurs adimensionnées, rapport de la variable en question à la valeur de référence. Ainsi dans le système des trois grandeurs de référence choisies, on aura :

$$x^+ = \frac{x}{x_1}, y^+ = \frac{y}{x_1}, V^+ = \frac{V}{V_\infty}, p^+ = \frac{2p}{\rho_1 V_\infty^2}$$

Les relations ci-après s'en déduisent et permettent d'obtenir les valeurs de référence pour chaque grandeur ou tout opérateur :

$$t^+ = \frac{tV_\infty}{x_1}, \nabla^+ = x_1 \nabla, \nabla^{2+} = x_1^2 \nabla^2 \quad (28)$$

Réécrivons les deux premières équations (10), mais sous forme adimensionnée :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\rho_1 V_\infty^2}{x_1} \frac{dV^+}{dt^+} &= -\frac{\rho_1 V_\infty^2}{2x_1} \nabla^+ p^+ + \frac{V_\infty \mu}{x_1^2} \nabla^{2+} V^+ + \rho_1 g \\ \frac{V_\infty}{x_1} \rho_1 c_p \frac{dT^+}{dt^+} \delta T &= \frac{\lambda}{x_1^2} \nabla^{2+} T + \delta T \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

À partir de là, le développement va être différent suivant que l'on adopte l'une ou l'autre des séries d'hypothèses restrictives que nous avons définies (§ 2.2).

#### 4.2.2 Traitement correspondant à la première série d'hypothèses restrictives. [Convection forcée (§ 2.2.1)]

Le terme en  $pg$  est le même partout et égal à une constante quel que soit l'élément de volume considéré. C'est une constante dont nous pouvons ne pas tenir compte dans l'adimensionnement. De même, dans le cas de l'incompressibilité  $\varphi = \varphi_\infty = Cte$ .

En divisant alors chacune des équations par le facteur de leur premier terme :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dV^+}{dt^+} &= -\frac{\nabla^+ p^+}{2} + \frac{v}{V_\infty x_1} \nabla^{2+} V^+ \\ \frac{dT^+}{dt^+} &= \frac{a}{V_\infty x_1} \nabla^{2+} T^+ \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

(en rappelant que  $\frac{\lambda}{\rho c_p}$  est la diffusivité  $a$ , et que  $\frac{\mu}{\rho_\infty}$  est la viscosité cinématique  $\nu$ ).

On voit que seront décrits par les **mêmes équations adimensionnées** les différents écoulement anisothermes qui auront simultanément en commun la même valeur de  $V_\infty x_1 / \nu$  et de  $\nu/a$ .

Le nombre  $V_\infty x_1 / \nu$  est le **nombre de Reynolds** ( $Re$ ) qui caractérise la similitude dans toute la mécanique des fluides isothermes.

Le nombre  $\nu/a$  est le **nombre de Prandtl** ( $Pr$ ) qui doit, lui aussi, être égal pour deux cas d'échange thermique réputés semblables.

Le **nombre de Péclet** :

$$Pe = Re \cdot Pr = \frac{V_\infty x_1}{a}$$

est souvent utilisé comme caractérisant seul la similitude en convection forcée, tout comme le seul nombre de Rayleigh en convection naturelle (§ 4.2.3), ce qui a l'avantage de fixer les similitudes par un seul nombre au lieu de deux. En fait, l'erreur est faible si le nombre de Prandtl, dont on remarquera qu'il ne regroupe que les seules propriétés physiques du fluide utilisé (à l'exclusion des caractérisations

géométrique ou cinématique sur les conditions de son utilisation qui, elles, figurent dans le nombre de Reynolds), est voisin de 1. C'est le cas pour tous les gaz ( $0,7 < Pr < 1$ ) et, à titre moindre, pour bon nombre de fluides industriels (eau en particulier).

#### 4.2.3 Traitement correspondant à la deuxième série d'hypothèses restrictives. [Convection naturelle (§ 2.2.2)]

La valeur de  $\rho$  est maintenant une fonction de la température et, pour simplifier, on adoptera une relation de variation linéaire de  $\rho$  en fonction de  $T$ .

$$\rho = \rho_r [1 - \beta(T - T_r)]^+ \quad (31)$$

avec  $T_r$  température de référence

ou encore, en adoptant l'adimensionnement des températures :

$$\rho = \rho_r (1 - \beta \delta T T^+)$$

Logiquement, cette valeur devrait être transposée dans trois termes des deux premières équations du système (10) où  $\rho$  figure, ce qui implique des difficultés de résolution.

Aussi décidera-t-on de ne remplacer  $\rho$  par cette expression, fonction de la température, que dans le terme moteur  $pg$  puisque ce dernier n'existe qu'à partir des variations de  $\rho$ , les termes d'inertie ou en  $\rho c_p$  n'étant, eux, que faiblement modifiés par les variations de  $\rho$  autour de  $\rho_\infty$ . Pour eux, on adoptera donc :

$$\rho = \rho_\infty \text{ (hypothèse de Boussinesq)}$$

Bien entendu, l'approximation de Boussinesq exclut les variations trop grandes de température, d'autant qu'elle conserve  $\lambda = Cte$  en  $T$ .

Adoptons-la néanmoins, en remarquant que, conformément à la deuxième série d'hypothèses restrictives (§ 2.2.2), le terme en  $\nabla p$  est négligeable en convection naturelle.

Dans ce contexte et en admettant toujours une longueur, une vitesse et une pression comme variables de référence :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\rho_\infty V_\infty^2}{x_1} \frac{dV^+}{dt^+} &= \frac{V_\infty \mu}{x_1^2} \nabla^{2+} V^+ + \rho_\infty g \beta T^+ \delta T + Cte \\ \frac{V_\infty}{x_1} \rho_\infty c_p \frac{dT^+}{dt^+} &= \frac{\lambda}{x_1^2} \nabla^{2+} T^+ \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Pour faire disparaître le facteur du premier terme, divisons par  $\frac{\rho_\infty V_\infty^2}{x_1}$  et par  $\frac{V_\infty \rho_\infty c_p}{x_1}$  respectivement ces deux équations :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dV^+}{dt^+} &= \frac{\nu}{x_1 V_\infty} \nabla^{2+} V^+ + \frac{g \beta \delta T x_1}{V_\infty^2} T^+ + Cte \\ \frac{dT^+}{dt^+} &= \frac{a}{x_1 V_\infty} \nabla^{2+} T^+ \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Le système d'équations ne représente des solutions identiques que si **trois nombres caractéristiques** sont maintenant égaux d'un cas à l'autre au lieu de deux : toujours le nombre de Reynolds et le nombre de Prandtl, mais aussi la quantité  $\frac{g \beta \delta T x_1}{V_\infty^2}$ .

Néanmoins, cette complication peut être compensée si on remarque que la vitesse de référence  $V_\infty$  imposée n'existe plus : il n'y a plus de valeur physique significative de la vitesse de référence puisqu'il n'y a plus de vitesse imposée en convection naturelle alors qu'il y en avait une en convection forcée.

La tentation de prendre alors, sans aucun souci de la signification physique pour le moment, une vitesse de référence telle que le facteur  $\frac{g \beta \delta T x_1}{V_\infty^2}$  soit égal à 1, est quasi irrésistible.

Posons donc :

$$V_r = \sqrt{g \beta \delta T x_1} \quad (34)$$

**Nota** : le lecteur, choqué par un tel choix uniquement parce qu'il est bien commode, trouvera en § 8, une justification et une signification physique de cette **vitesse de référence**. On y proposera aussi deux autres choix, souvent utilisés pour les trois grandeurs fondamentales : le temps, défini à partir de la longueur de référence, et soit la viscosité cinématique  $\nu$ , soit la diffusivité thermique  $a$ , toutes deux homogènes à  $L^2 T^{-1}$ .

Les deux autres facteurs de similitude deviennent alors :

$$\frac{V_r x_1}{\nu} = \frac{\sqrt{g \beta \delta T x_1} x_1}{\nu}$$

et le nombre de Prandtl qui est conservé :

$$Pr = \frac{\nu}{a}$$

En élevant  $V_r x_1 / \nu$  au carré, on obtient le **nombre de Grashof** :

$$Gr = \frac{g \beta \delta T x_1^3}{\nu^2} \quad (35)$$

qui joue en convection naturelle le même rôle que  $Re^2$  en convection forcée. De même, l'homologue du nombre de Péclet se trouve être égal au produit :

$$Pr \cdot \sqrt{Gr}$$

Naturellement, si un nombre est caractéristique d'une similitude, son carré l'est aussi et l'usage s'est instauré de retenir en convection naturelle deux nombres caractéristiques des similitudes : le nombre de Grashof et le produit  $Pr^2 \cdot Gr$ . Mais là, comme en convection forcée, il est plus simple, quitte à sacrifier quelque peu à la rigueur, quand le nombre de Prandtl n'est pas trop différent de 1, de remplacer la double obligation de la similitude (à savoir : même nombre de Prandtl et même produit  $Pr^2 \cdot Gr$ ) par une seule condition intermédiaire :

$$\text{même produit } Pr \cdot Gr \text{ avec } Ra = Pr \cdot Gr$$

Ce produit est le **nombre de Rayleigh** et est souvent employé pour caractériser à lui seul les similitudes en convection naturelle. Mais il faut garder à l'esprit que sa signification est limitée, d'abord et avant tout, comme le nombre de Grashof, par la validité de l'hypothèse de Boussinesq sur laquelle est construit tout ce développement, mais aussi aux fluides dont le nombre de Prandtl ne diffère pas trop de 1.

#### 4.2.4 Adimensionnement aux limites

Les équations que nous avons adimensionnées sont valables pour l'ensemble du fluide mais ne sont solubles comme telles que si l'on définit les conditions aux limites. Il nous faut donc aussi définir la similitude dans les conditions aux limites en adimensionnant les relations qui les expriment.

Mécaniquement (voir l'article *Mécanique des fluides* [A 1 870] du traité Sciences fondamentales), on adimensionne l'effort tangentiel à la paroi en remarquant que cet effort a les dimensions d'une pression :

$$\frac{2 \tau_p}{\rho_\infty V_r^2} = \frac{-2 \mu \left( \frac{\partial u^+}{\partial y^+} \right)_p \frac{V_r}{x_1}}{\rho_\infty V_r^2} \quad (36)$$

Le premier membre est, par définition, le coefficient de frottement, le second fait apparaître le gradient de vitesse adimensionné à la paroi et, une fois de plus, le nombre de Reynolds.

Thermiquement, on sait que l'on a :

$$\varphi_p = \lambda_f \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{pf} = \lambda_s \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{ps} = h (T_p - T_M)$$

En adimensionnant les termes concernant le fluide, on obtient :

$$h \delta T = \frac{\lambda_f}{x_1} \left( \frac{\partial T^+}{\partial y^+} \right)_p \delta T \quad (37)$$

soit encore :

$$\left( \frac{\partial T^+}{\partial y^+} \right)_p = \frac{h x_1}{\lambda_f}$$

C'est le nombre de Nusselt qui représente donc le gradient de température adimensionné à la paroi.

Si les mêmes équations adimensionnées décrivent deux écoulements physiquement différents, ce sont les nombres de Nusselt caractérisant ces derniers qui sont égaux et non les  $h$ . Mais comme les développements ci-avant ont fait apparaître les similitudes à l'intérieur d'une classe irréductible d'écoulements anisothermes par le biais de quelques nombres caractéristiques, il s'ensuit immédiatement que les variations du nombre de Nusselt ne vont dépendre que de ces nombres caractéristiques.

On aura donc déjà l'allure des corrélations entre  $h$  (par le biais du nombre de Nusselt) et les nombres dont ce dernier dépend :

- en convection forcée :  $Nu = f(Re, Pr)$  ;
- en convection naturelle :  $Nu = g(Gr, Pr)$  ;

sans qu'apparaissent dans cette expression du nombre de Nusselt quelques paramètres isolés d'ordre géométrique, mécanique ou thermophysique que ce soit autrement que ce soit regroupés dans les nombres de Reynolds, de Prandtl, de Péclet (convection forcée), de Grashof ou de Rayleigh (convection naturelle).

### 4.3 Commentaires

Si on résume ce troisième et capital paragraphe, on est donc en bonne voie pour connaître le coefficient de transfert convectif de l'expression essentielle :

$$\varphi_p = h (T_p - T_M)$$

puisque l'on a défini  $T_M$  et établi que la connaissance de  $h$  passe par l'intermédiaire d'un nombre dit de Nusselt dont l'expression, encore à déterminer, n'est fonction que du nombre de Reynolds et du nombre de Prandtl (convection forcée) ou du nombre de Grashof et du nombre de Prandtl (convection naturelle). On risque de rencontrer d'autres nombres caractéristiques :

■  $M_s$ , le **nombre de Margoulis** dans les ouvrages anciens, désignait :

$$M_s = \frac{Nu}{Pe} = \frac{Nu}{Re \cdot Pr} = \frac{h}{\rho c_p V}$$

■  $M_s$  est aussi, dans les ouvrages anglo-saxons, le **nombre de Stanton**, peu utilisé, égal au nombre de Margoulis.

Dans certains autres ouvrages anciens le nombre de Stanton est l'inverse du nombre de Prandtl.

#### Remarque : ailettes

Si le flux surfacique est médiocre parce que  $h$  est faible, on peut augmenter le **flux total** en augmentant la surface de contact avec le fluide ; cela justifie l'emploi d'**ailettes** dans les fluides où  $h$  est médiocre.

## 5. Limites de la similitude. Généralités sur le nombre de Nusselt

La motivation du paragraphe précédent, à savoir trouver des écoulements anisothermes semblables relevant d'une même expression des nombres caractéristiques qui ont été définis, peut-elle conduire, en fin de compte, à la relation unique idéale dont relèveraient tous les cas ? La réponse est, malheureusement, négative mais l'on peut au moins définir quelques grandes classes d'écoulements irréductibles les uns aux autres. À l'intérieur de chacune d'elles, une même

expression du nombre de Nusselt reste valable quitte à aménager les coefficients pour passer d'une forme géométrique d'écoulement à une autre, par exemple de l'écoulement dans un tube cylindrique à celui qui caractérise un tube à section rectangulaire.

Les tableaux 1 et 2 sont en principe à double entrée et distinguent essentiellement trois types de géométrie et deux types d'écoulement mécanique. C'est là un choix quelque peu arbitraire car d'autres peuvent tout aussi bien se défendre. Ces tableaux donnent l'allure des expressions du nombre de Nusselt. Mais ils doivent faire apparaître les différences substantielles qui séparent physiquement la convection forcée de la convection naturelle, d'où une présentation en deux parties, l'une relative à la convection forcée, l'autre à la convection naturelle.

**Tableau 1 – Convection forcée. Allure du nombre de Nusselt**

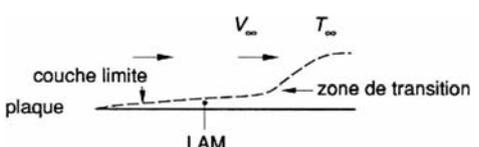
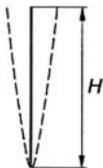
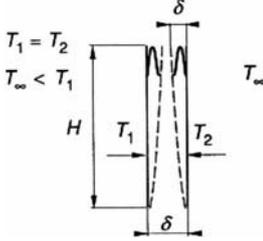
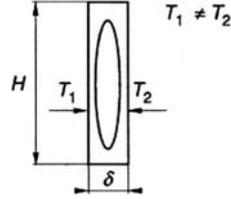
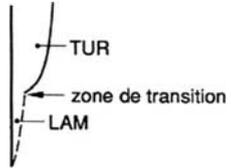
	Géométries fermées et régime établi	Géométries ouvertes
<b>Régime laminaire</b>	$Re \leq 2\,000$ ou $2\,500$  $Nu = Cte$ La constante dépend : – des conditions thermiques aux parois $T_p = Cte$ ou $\varphi_p = Cte$ ou autres ; – de la géométrie.	 <p style="text-align: center;">LAM</p> $Re_x < 5 \times 10^5 \left\{ \begin{array}{l} Nu_{x_1} = C_1 Re_{x_1}^{0,5} Pr^{0,33} \\ \overline{Nu}_L = C_2 Re_L^{0,5} Pr^{0,33} \end{array} \right.$ <p>avec <math>L</math> valeur maximale de <math>x</math> pour une plaque limitée à <math>L</math>.</p>
<b>Régime turbulent</b>	$Re > 2\,000$ ou $2\,500$ $Nu = Cte Re^{0,8} Pr^{0,33}$ Formules de Colburn pour $Pr \geq 0,5$ $Nu = C_1 + C_2 Pe^{0,8}$ pour $Pr < 0,02$ (métaux liquides, plasmas où $Pe = Re \cdot Pr$ )  La longueur figurant dans le nombre de Nusselt ou le nombre de Reynolds de transition est le diamètre hydraulique.	$Re_x > 5 \times 10^5 \left\{ \begin{array}{l} Nu_x = C_1 Re_x^{0,8} Pr^{0,33} \\ \overline{Nu}_L = C_2 Re_L^{0,8} Pr^{0,33} \\ \overline{Nu} = C_3 Re^{0,65} \text{ si } Pr < 0,02 \end{array} \right.$ <p>On donne le <b>nombre de Nusselt local</b> et le <b>nombre de Nusselt moyen</b> :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– le nombre de Nusselt local dépend de l'emplacement <math>x_1</math> ;</li> <li>– le nombre de Nusselt moyen est plus exactement :</li> </ul> $\frac{\overline{h} \times \text{dimension totale}}{\lambda_f}$
– Les constantes $C_1$ , $C_2$ et $C_3$ dépendent de la géométrie. – L'établissement de régimes mécanique et thermique dans les géométries fermées $Nu = f(x, Re, Pr)$ correspond au régime non établi.		De même, les <i>géométries ouvertes</i> ne figurent ici que par l'unique exemple de la plaque plane semi-infinie. Le cas de beaucoup le plus fréquent est celui d'un cylindre (plein ou creux) placé dans un écoulement perpendiculaire à son axe. Là aussi le nombre de Nusselt varie du point d'arrêt (ou d'attaque) jusqu'au point diamétralement opposé. Là aussi, comme pour la plaque, on peut définir un nombre de Nusselt moyen alors que le nombre de Reynolds, calculé avec le diamètre ou le diamètre hydraulique (quatre fois la section droite rapportée au périmètre si le cylindre n'est pas circulaire), reste constant. Si le cylindre est creux et qu'un deuxième fluide circule à l'intérieur, on a alors un élément d'échangeur dont le coefficient d'échange global se détermine par la formule :
<b>Remarque</b> : ce tableau est destiné à donner l'allure des corrélations entre, d'une part, le nombre de Nusselt et, d'autre part, le nombre de Reynolds ou le nombre de Prandtl. Deux grands cas de géométries y sont donnés, chacun représenté par un seul exemple. Des corrélations plus précises mais étroites sont données dans le paragraphe 6. On y verra aussi que les cas <b>géométrie ouverte</b> et <b>géométrie fermée</b> sont moins nettement tranchés qu'il n'y paraît.		$\frac{1}{H} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}$
Dans une <i>géométrie fermée</i> (tube ou espace entre deux plaques parallèles), l'influence sur l'écoulement et le transfert, relatifs à un petit élément de surface situé près des bords d'attaque, de la géométrie en question est d'abord très faible : elle croît quand croît la distance depuis l'entrée jusqu'à se stabiliser à une valeur asymptotique (pour une section droite constante). Toute la zone dite d' <b>établissement du régime</b> (tant mécanique que thermique) n'est pas prise en compte dans le tableau.		Ici on se limite à calculer le nombre de Nusselt côté de l'échange externe.
		Mais cette géométrie ouverte l'est rarement. En fait, on emploie des paquets de tubes peu éloignés les uns des autres (anciens radiateurs d'automobile) et on doit calculer d'une manière plus empirique le nombre de Nusselt moyen extérieur du faisceau de tubes.

Tableau 2 – Convection naturelle. Allure du nombre de Nusselt

	Géométries ouvertes plaques verticales	Géométries fermées débitantes plaques verticales	Cavités parallélépipédiques fermées bouchées
Régime laminaire	 $\left. \begin{aligned} Nu_{x_1} &= C_1 Ra_{x_1}^{0,25} \\ \overline{Nu}_H &= C_2 Ra_H^{0,25} \end{aligned} \right\} T_p = Cte$ $\left. \begin{aligned} \overline{Nu} &= \frac{Cte Ra_H^{0,25}}{\left[1 + \left(\frac{C_2}{Pr}\right)^{9/16 - 4/9}\right]} \\ \text{si } \delta T &= \frac{\varphi_p H}{\lambda} \end{aligned} \right\} \varphi_p = Cte$	 $\delta_M \text{ en } H < d/2$ (voir 2 plaques indépendantes) $Nu_{\delta_M} = Cte Ra_{\delta_M} \frac{\delta_M}{H}$ Allongement = $Al = \frac{H}{\delta}$ $2 \delta_M \text{ en } H > \delta$ $\overline{Nu}_\delta = C_1 \frac{Ra}{Al} \left[1 - \exp\left(-\frac{C_2 Al}{Ra}\right)^{3/4}\right]$	 $T_1 > T_x > T_2$ $Al = \frac{H}{\delta}$ <p><b>Gaz</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li><math>Ra_\delta &lt; 500</math> pseudo-conduction ;</li> <li><math>6 \times 10^3 &lt; Ra_\delta &lt; 2 \times 10^5</math> <math display="block">Nu_\delta = Cte Ra_\delta^{0,25} Al^{-0,11} ;</math> </li> <li><math>2 \times 10^5 &lt; Ra_\delta &lt; 10^8</math> <math display="block">Nu = Cte Ra_\delta^{0,33} Al^{-0,11} .</math> </li> </ol> <p><b>Liquide</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li><math>10^4 &lt; Ra_\delta &lt; 10^7</math> <math display="block">Nu = Cte Ra_\delta^{0,25} Pr^{0,012} Al^{-0,3} ;</math> </li> <li><math>10^6 &lt; Ra_\delta &lt; 10^9</math> <math>1 &lt; Al &lt; 40</math> <math display="block">Nu = Cte Ra_\delta^{0,33} .</math> </li> </ol>
Régime turbulent	 $\left. \begin{aligned} Nu_{x_1} &= C_1 Ra_{x_1}^{0,33} \\ \overline{Nu}_H &= C_2 Ra_H^{0,33} \end{aligned} \right\} T_p = Cte$ $\left. \begin{aligned} Nu_H &= C_3 Ra_H^{1,33} \\ \text{où } \delta T &= \frac{\varphi_p H}{\lambda} \end{aligned} \right\} \varphi_p = Cte$	si $\frac{Ra}{Al} > 300$ et $T_1 = T_2$ $\overline{Nu}_\delta = Cte \left(\frac{Ra}{Al}\right)^{0,25}$	
Nombres caractéristiques indépendants : $Nu, Gr, Pr$ Nombre caractéristique non indépendant : $Ra = Pr \cdot Gr$ Analogie entre $Gr$ en convection naturelle et $Re^2$ en convection forcée Direction privilégiée : la verticale dans le champ de forces (ici l'axe des $x$ )			

## 5.1 Classes irréductibles en convection forcée

### 5.1.1 Principales distinctions

Nous distinguerons trois configurations qualitatives et deux régimes mécaniques laminaire ou turbulent. Cette dernière classification est évidente. Employer le terme de qualitatif pour trois

grandes classes de géométries permet de les distinguer des simples changements de forme géométrique ; des tubes à section droite, carrée, rectangulaire, triangulaire, circulaire ne conduisent pas à la même expression du nombre de Nusselt, comme on le verra en détail (§ 6), mais passer de l'une à l'autre n'est que l'affaire de coefficients numériques. Ils appartiennent donc tous les quatre à la même classe géométrique qualitative ; on distinguera trois de ces classes en convection forcée (CF).

**■ Géométries ouvertes (parfois dites également externes)**

Tel est le cas pour une plaque plane semi-infinie dans un écoulement anisotherme parallèle à son plan ou un cylindre (tube ou barre) d'axe perpendiculaire à l'écoulement ou encore une aile d'avion. Le nombre de Nusselt est fonction de  $x$  et plus généralement, sur un tube ou une aile, de la zone considérée.

**■ Géométries fermées en régime établi**

L'écoulement anisotherme a lieu dans un tube de forme quelconque. Si la section de ce dernier est constante (si on se place assez loin de la section d'entrée et de la section où débute le signal thermique) et la conductivité thermique  $\lambda$  du fluide constante, le nombre de Nusselt est constant en  $x$ .

**■ Géométries fermées dans la zone d'établissement**

Elles correspondent au fait que l'écoulement débute mécaniquement ou thermiquement dans ces géométries. C'est donc la zone où le nombre de Nusselt évolue en fonction de  $x$ .

**5.1.2 Établissement et transition**

En fait, les sous-ensembles définis ci-avant sont quelque peu simplistes. Dans les trois types de géométries, un seul est entièrement compatible avec la distinction régime laminaire ou turbulent : celui qui correspond à une géométrie fermée en régime établi. Dans ce cas, en effet, tout ce qui s'est passé dans la zone d'établissement déterminera complètement si le régime est laminaire ou turbulent.

Pour les **géométries ouvertes**, l'écoulement est toujours laminaire dans les régions les plus amont, zone d'autant plus réduite que le nombre de Reynolds (ou le nombre de Grashof en convection naturelle) a une valeur élevée. Mais, après une zone de transition, s'établit d'une manière plus ou moins progressive le passage d'un écoulement laminaire à un écoulement pleinement développé en turbulent. Pour une géométrie ouverte comme une plaque plane semi-infinie, le nombre de Reynolds, qui caractérise la transition laminaire-turbulent, est voisin de  $5 \times 10^5$ . Si la plaque réelle, donc limitée dans le sens de l'écoulement, se caractérise par un nombre de Reynolds inférieur à cette valeur pour le bord de fuite, l'écoulement reste laminaire sur toute la plaque. Dans le cas contraire, l'écoulement, après une zone de transition, devient turbulent. Même constat pour une géométrie prismatique d'axe perpendiculaire à l'écoulement. Mais, cette fois, l'écoulement ne reste laminaire sur toute la surface que pour des nombres de Reynolds très faibles ( $Re < 60$  pour un cylindre circulaire d'axe perpendiculaire à l'écoulement).

Pour les **géométries fermées** dans la zone d'établissement, le régime commence à être laminaire comme en géométrie ouverte. Quand  $x$  croît, deux cas se présentent.

**■ Les couches limites se rejoignent avant que les caractéristiques de l'écoulement n'aient amorcé la turbulence :** dans ce cas, l'écoulement est laminaire dans la zone d'établissement et le restera (\*) dans la géométrie du régime établi qui suit.

**■ Les couches limites deviennent turbulentes avant de s'être rejointes dans la géométrie fermée :** le régime d'écoulement est turbulent et le restera (\*) en aval.

(\*) Le restera sauf modification des propriétés physiques ( $\mu, \rho$ ) du fluide ou encore sauf variation de section du conduit, c'est-à-dire changement de tous paramètres qui peuvent faire varier substantiellement le nombre de Reynolds en fonction de  $x$ . On évitera particulièrement les *relaminarisations* d'un écoulement turbulent, *relaminarisations* qui entraînent une forte diminution du coefficient d'échange convectif.

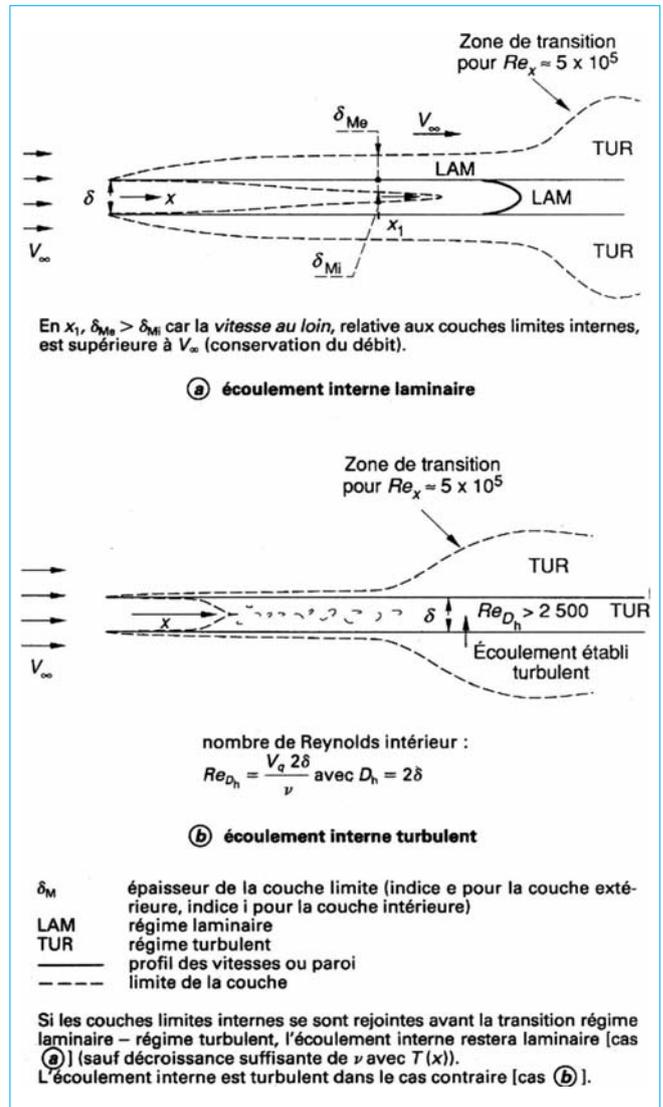
C'est donc la **zone d'établissement** du régime qui, dans une géométrie fermée, présentera la **zone de transition** responsable du passage éventuel de l'écoulement laminaire à l'écoulement turbulent.

Il ne faut pas confondre zone d'établissement et zone de transition, confusion d'autant plus aisée que certains auteurs parlent de régime turbulent pleinement *établi* après la transition alors que l'expression, aussi utilisée, de régime turbulent pleinement développé paraît préférable.

Par définition, une **transition** n'est pas une discontinuité et occupe donc une zone dont il faut fixer la longueur dans le sens de l'écoulement.

C'est là une question délicate et déjà affaire de spécialistes. Pratiquement, en convection forcée tout au moins, l'épaississement des couches limites dans la zone d'établissement du régime est tellement brusque dans le cas de la transition laminaire-turbulent que l'on peut considérer comme de faible longueur, donc négligeable, la zone où le régime n'est plus laminaire mais pas encore *turbulent pleinement développé*. Cette simplification est très souvent inadmissible en convection naturelle, les zones de transition étant beaucoup plus allongées.

Précisons cette notion difficile sur l'exemple de deux plaques planes parallèles dans un écoulement uniforme (figure 5).



**Figure 5 – Rappels de mécanique des fluides isothermes. Les transitions régime laminaire – régime turbulent pour des plaques semi-infinies parallèles**

Près des bords d'attaque, l'écoulement se comporte pratiquement pour chacune des deux plaques comme si l'autre n'existait pas ; c'est le retour à la géométrie ouverte : quand les couches limites s'épaississent, elles interagissent l'une sur l'autre entre les plaques (mais pas à l'extérieur où la géométrie reste ouverte). Au bout d'une certaine distance, les couches limites se seront rejointes et n'évolueront donc plus. Le régime est dit établi à partir de cette distance. Il y a par ailleurs deux longueurs d'établissement, l'une mécanique, l'autre thermique. Le nombre de Nusselt (variable en  $x$ ) tend donc (toujours en décroissant) vers une valeur asymptotique qui caractérise le régime établi.

Il est bon cependant de préciser ce que devient le fluide en aval du bord d'attaque et les différences par rapport à l'écoulement pour deux plaques sans interaction l'une sur l'autre : la distinction est essentielle par rapport à la CN et nous le retrouverons. L'invariance du débit-masse entre les deux plaques qui caractérise ici la CF implique que l'épaississement des couches limites, où la vitesse est réduite, induit automatiquement une survitesse par rapport à  $V_\infty$  dans les zones situées encore en dehors de ces couches, celles-ci se définissant toujours par le lieu des points où la vitesse est 99 % de la vitesse locale en dehors d'elles.

On montre que le profil des vitesses en laminaire entre deux plaques est parabolique, d'où :

$$V_{\max} = 2 V_\infty$$

La **vitesse augmente dans la zone d'établissement** en dehors des couches limites.

### 5.1.3 Expression du nombre de Nusselt en convection forcée (CF)

Quelques **remarques essentielles** aideront à la compréhension du tableau 1 comme des expressions plus détaillées du nombre de Nusselt et des données ultérieures.

■ Le **nombre de Nusselt en régime établi** se présente pratiquement toujours, en **convection forcée**, sous la forme :

$$Nu = C_1 Re^m \cdot Pr^{0,33} \quad (38)$$

■ Le **nombre de Nusselt** dépend de la distance depuis l'entrée de la géométrie qui introduit des parois dans ou autour de l'écoulement. Pour les **géométries fermées**, en CF, la distance nécessaire à cet établissement croît avec le nombre de Reynolds en **régime laminaire**, jusqu'à atteindre des valeurs de l'ordre de cinquante fois le diamètre hydraulique, mais décroît en **régime turbulent** jusqu'à des valeurs faibles.

Dans ces zones, le nombre de Nusselt est plus élevé que dans la région de régime établi mais, pratiquement, dans les applications industrielles, on ne tient guère compte de cette variation en  $x$  sauf pour les tubes courts devant leur diamètre.

Le nombre de Nusselt local varie toujours de l'amont à l'aval dans les **géométries ouvertes** où le régime n'est donc jamais établi.

■ Les **conditions aux limites thermiques** et, en particulier, la condition imposée à la paroi  $T_p = Cte$  ou  $\varphi_p = Cte$  donnent des valeurs substantiellement différentes (30 % en plus pour  $\varphi_p = Cte$ ) en régime laminaire de CF.

Mais dès que le nombre de Reynolds augmente et que l'on atteint des **régimes turbulents**, même modérés, d'une part le **nombre de Nusselt croît très sensiblement** et très brusquement, tandis que, d'autre part, il devient pratiquement **insensible aux différentes conditions limites thermiques**.

**Nota** : ce n'est exact que pour les fluides usuels,  $Pr = 1$  et  $Pr > 1$ . Ce serait à revoir, par exemple, pour des métaux liquides ( $Pr < 0,02$ ) ou des plasmas.

Les formules du nombre de Nusselt en régime turbulent ne précisent donc pas ces conditions puisque le nombre de Nusselt y est pratiquement insensible.

Le tableau 1 met en évidence quatre résultats d'importance :

- le nombre de Nusselt, dont on tire le coefficient convectif  $h$ , s'exprime en fonction des nombres de Reynolds et de Prandtl ;
- en géométrie fermée, en régime établi et en régime laminaire, le nombre de Nusselt est une constante ;
- en géométrie ouverte et en régime turbulent, le nombre de Reynolds intervient à la puissance voisine de 0,8 et le nombre de Prandtl à la puissance 0,3 pour les fluides usuels ( $Pr > 0,5$ ). C'est faux pour les métaux liquides (§ 9) ;
- en géométrie ouverte laminaire, la corrélation entre le nombre de Nusselt et le nombre de Reynolds fait intervenir ce dernier à une puissance voisine de 0,5.

## 5.2 Classes irréductibles en convection naturelle

On retrouve tout d'abord bien sûr la distinction entre le régime mécaniquement laminaire et le régime mécaniquement turbulent, à cette difficulté près que la zone de transition entre les deux régimes, telle qu'on pouvait la relever le long d'une plaque plane par exemple en convection forcée, est, en convection naturelle cette fois, beaucoup plus étendue spatialement qu'elle ne l'était en convection forcée.

La notion de géométrie ouverte passe sans changement de la convection forcée à la convection naturelle ; il n'en est pas de même pour la géométrie fermée dans laquelle la CF introduit un débit-masse constant de l'entrée à la sortie (figure 6), tout comme peut le faire aussi la convection naturelle (cas **b** et **c** de la figure 6) avec, du reste, un profil des vitesses complètement différent.

Mais le fait nouveau est que la géométrie fermée et **bouchée** (cas **d** de la figure 6), incompatible avec tout débit forcé, reste compatible avec la CN comme on le montre schématiquement.

En CN, on définit l'allongement  $A\ell$  pour toutes les géométries fermées débitantes ou non. Pour ces dernières, l'usage s'est instauré d'utiliser le nombre de Grashof avec, comme longueur caractéristique, non la hauteur mais l'espace entre les deux plaques.

La distinction entre le régime laminaire et le régime turbulent s'estompe, ne serait-ce que par la longueur élevée de la transition entre les deux régimes. Aussi, le plus souvent, les formules du nombre de Nusselt ne sont-elles données comme valables que dans une fourchette de valeurs du nombre de Grashof (ou de Rayleigh).

Des formules assez spécialisées et à fourchette de similitude étroite sont données dans le paragraphe 6.

La convection naturelle dans le volume d'**enceintes fermées** implique un traitement spécifique du reste très important pour les applications et un nouveau paramètre apparaît : l'**allongement** ou rapport de la hauteur de la cavité à la dimension dans le plan horizontal. Remarquons que le qualificatif de fermé implique l'absence de débit à travers la limite considérée, que cette dernière soit matérialisée ou pas ; la figure 6d montre la trace d'enceintes parallélépipédiques où une des faces peut ne pas exister matériellement (pour un liquide, la surface de séparation supérieure est formée naturellement entre le liquide et le gaz ambiant).

Pratiquement, les cas industriels qui relèvent de la convection naturelle en enceintes fermées sont très différents, ainsi que leur traitement, suivant la valeur de l'allongement.

■ Les **allongements de l'ordre de 0,5 ou plus** provoquent, par exemple, la rupture de l'isolement créé, entre deux parois, par une **couche d'air immobile** donc très peu conductrice. L'apparition de convection naturelle dans des cavités fermées crée une augmentation du transfert thermique. Les coefficients de transfert  $h$  sont plusieurs dizaines de fois supérieurs à ceux de la conduction pure pour laquelle le fluide est immobile.

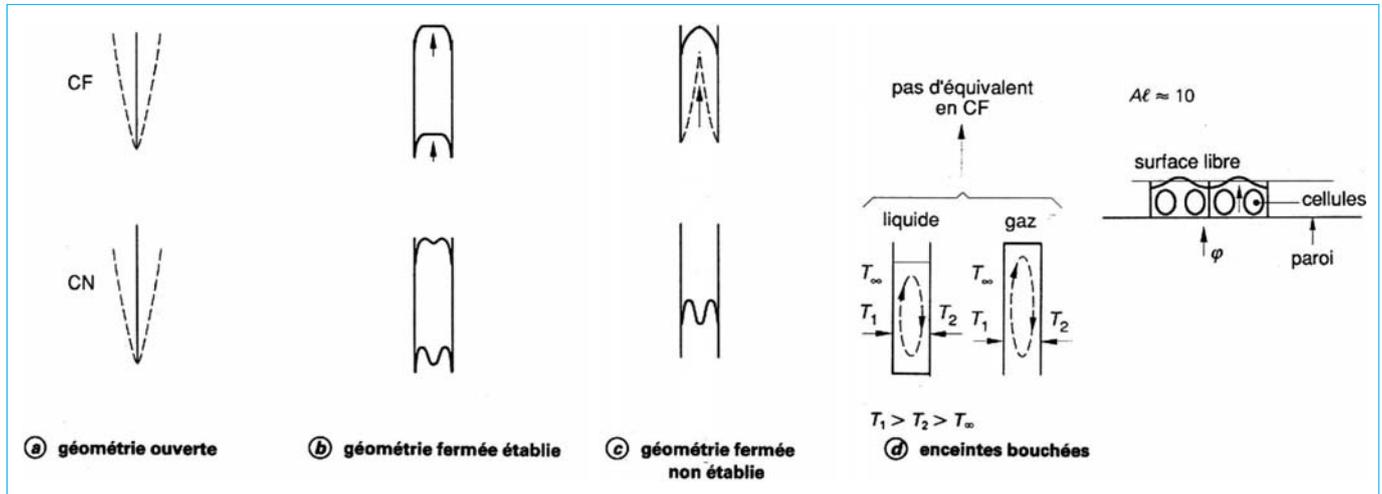


Figure 6 – Profil comparatif des vitesses en convection naturelle et en convection forcée

■ **Les allongements très faibles** concernent souvent des couches assez minces de liquides. Le traitement en lui-même justifie des ouvrages spécialisés. Précisons seulement qu'il se forme spontanément des cellules, dites de Bénard-Karman, de dimensions horizontales voisines de l'épaisseur, à l'intérieur desquelles se créent des rouleaux convectifs. Couplé avec les variations de tension superficielle en fonction de  $T$ , ce comportement convectif explique la formation de peintures craquelées. Mais ce n'est qu'un exemple parmi beaucoup d'autres.

Ces considérations nous conduisent au tableau 2 où est conservée la distinction entre régime laminaire et régime turbulent ; mais apparaît une nouvelle classe géométrique, celles des **enceintes fermées** à l'intérieur desquelles les traitements, comme les applications, sont fort différents selon la valeur de l'**allongement**.

### 5.3 Expressions du nombre de Nusselt. Généralités

Les paragraphes 2, 3, 4 et 5 ont un but didactique et la logique impose certains regroupements, classifications ou comparaisons que nous avons essayé de développer de la manière qui nous paraît optimale pour la compréhension.

L'objet du paragraphe 6 est beaucoup plus finalisé. Il s'adresse aux utilisateurs qui, ayant assimilé ce qui précède, se voient imposer un calcul de transfert à partir de données (parfois insuffisantes) qui n'ont plus rien à voir avec la compréhension.

Le plus souvent, l'utilisateur saura tout de même s'il est en CF ou en CN. D'où encore ces deux grandes subdivisions, mais presque toujours il ne connaîtra que la géométrie. *A priori*, il ne saura nullement s'il est en régime établi ou non, ni même si le régime est laminaire ou turbulent. C'est pourquoi l'ordre dans le paragraphe 6rompt avec ce qui précède.

À l'intérieur du traitement de **chaque géométrie**, le lecteur trouvera pour les deux conditions aux limites les plus fréquentes ( $\varphi_p = Cte$  et  $T_p = Cte$ ) les critères pour savoir s'il est en écoulement laminaire ou turbulent, en régime établi ou non.

Dans le cas du **régime non établi**, le problème est assez difficile et nous ne l'avons pas développé dans ce qui précède. On comprendra cependant aisément que, dans ce cas intermédiaire entre les géométries ouvertes et la géométrie fermée qui va finir par délimiter cet écoulement où les vitesses ne varient plus (à  $p$  et  $A$  constants), le nombre de Nusselt dans cette région d'établissement

doit donc faire intervenir à la fois le diamètre hydraulique de ce que sera en aval cette géométrie fermée et la distance  $x$  à laquelle on se trouve depuis le bord d'attaque.

Apparaît alors (pour  $T_p = Cte$  tout au moins) le **nombre de Graetz** construit avec une dimension de référence différente. Pour compliquer les choses, les auteurs n'ont pas tous adopté les mêmes références à un facteur près.

C'est ainsi que le nombre de Nusselt en  $x$ , toujours construit avec le diamètre hydraulique (soit  $Nu = h(x) D_h / \lambda$ ) sera exprimé en fonction d'un  $x$  adimensionné où s'introduit le produit  $Re \cdot Pr$  et tantôt le diamètre hydraulique  $D_h$ , tantôt le rayon hydraulique  $R_h$ . On posera suivant les cas :

$$\text{— soit} \quad x^* = \frac{x}{D_h Pe}$$

$$\text{— soit} \quad x^+ = \frac{x}{R_h Pe}$$

Néanmoins, le paragraphe 6 comporte une compilation d'un grand nombre d'auteurs qui ne se sont pas concertés et emploient des notions et des notations différentes ; si les regroupements de similitude s'imposent à tous, l'un peut se référer au rayon hydraulique, l'autre au diamètre comme dans l'exemple ci-avant.

C'est dans ce même cas d'établissement de régime que l'on retrouvera, dans les solutions exprimant le nombre de Nusselt, les séries infinies auxquelles nous sommes habitués la conduction en régime stationnaire. Ce n'est pas une coïncidence ; ce fait illustre entre autres la proposition du début : **la convection n'est bien que de la conduction dans un milieu déformable**.

Cette diversité un peu hétéroclite du choix des auteurs dont il nous faut donner les résultats dans le paragraphe 6 conduit, en convection naturelle, à des possibilités de confusion. Nous avons montré que la **hauteur de la géométrie** était (dans le seul champ de la pesanteur tout au moins) le paramètre significatif comme le sait bien tout fabricant de cheminées. Les innombrables études faites dans les enceintes parallélépipédiques ont imposé un deuxième paramètre : l'**épaisseur de la cavité** (en bidimensionnel) ou encore, ce qui revient au même, son **allongement**, rapport de sa hauteur à son épaisseur. Les auteurs donnent toujours le nombre de Grashof et l'allongement dans les formules du nombre de Nusselt. Le nombre de Grashof (ou de Rayleigh) est, le plus souvent, calculé avec l'**épaisseur**, l'action de la hauteur se retrouvant naturellement par le biais de l'allongement.

# 6. Expressions numériques du nombre de Nusselt

## 6.1 Convection forcée externe

### 6.1.1 Plaque plane et plaque de courbure faible

#### 6.1.1.1 Écoulement laminaire

$$Re_x = \frac{u_\infty x}{\nu}$$

$$Nu_x = \frac{h(x)x}{\lambda}$$

■ Le signal thermique débute au bord d'attaque (figure 7a)

- Si  $0,5 \leq Pr \leq 10$ ,  $Re_x < 3 \times 10^5$  ou  $Re_L < 3 \times 10^5$  :

$$Nu_x = 0,332 Re_x^{0,5} Pr^{1/3}$$

$$\overline{Nu}_L = 0,664 Re_L^{0,5} Pr^{1/3}$$

- Si  $Pr > 10$  :

$$Nu_x = 0,339 Re_x^{0,5} Pr^{1/3}$$

- Si  $Pr \ll 1$  (métal liquide) :

$$Nu_x = 0,565 Re_x^{1/2} Pr^{1/2}$$

$$\overline{Nu}_L = 1,1 \sqrt{(1 - Pr^{1/3})} Pe_L$$

Les propriétés physiques du fluide sont prises à la température du film :

$$T_f = \frac{T_p + T_\infty}{2}$$

■ Le signal thermique débute en aval du bord d'attaque (figure 7b) :

$$Nu_x = \frac{0,324 Re_x^{1/2} Pr^{1/3}}{\left[1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{3/4}\right]^{1/3}}$$

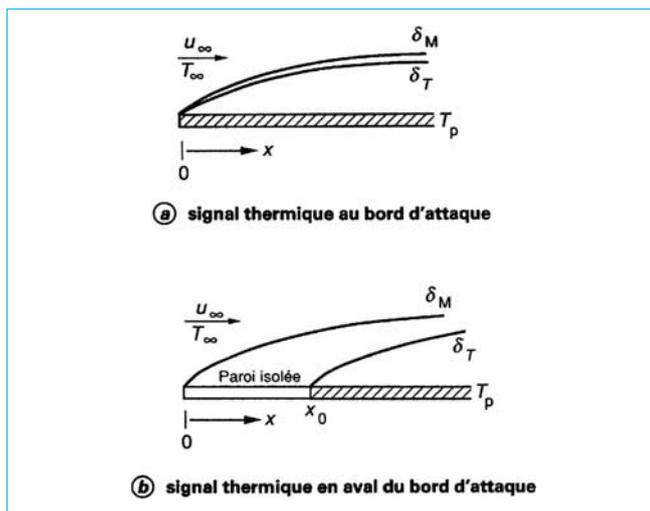


Figure 7 - Plaque plane. Écoulement laminaire

#### 6.1.1.2 Écoulement turbulent

■ Le signal thermique débute au bord d'attaque (figure 8a)

Pour  $Re > 5 \times 10^5$ .

- Si  $Pr \geq 0,5$  :

$$Nu_x = 0,0288 Re_x^{4/5} Pr^{1/3}$$

$$\overline{Nu}_L = 0,035 Re_L^{4/5} Pr^{1/3}$$

- Si  $Pr \ll 1$  (métal liquide) :

$$\overline{Nu}_L = 0,59 Pe_L^{0,61}$$

Comme pour l'écoulement laminaire, les propriétés physiques du fluide sont prises à la température du film :

$$T_f = \frac{T_p + T_\infty}{2}$$

■ Le signal thermique débute en aval du bord d'attaque (figure 8b).

- Pour les gaz ( $Pr \approx 1$ ) (Jakob et Dow [3]),

Si  $Re_L > 3 \times 10^5$  :

$$\overline{Nu}_L = 0,0280 Re_L^{4/5} \left[1 + 0,40 \left(\frac{L_0}{L}\right)^{2,75}\right]$$

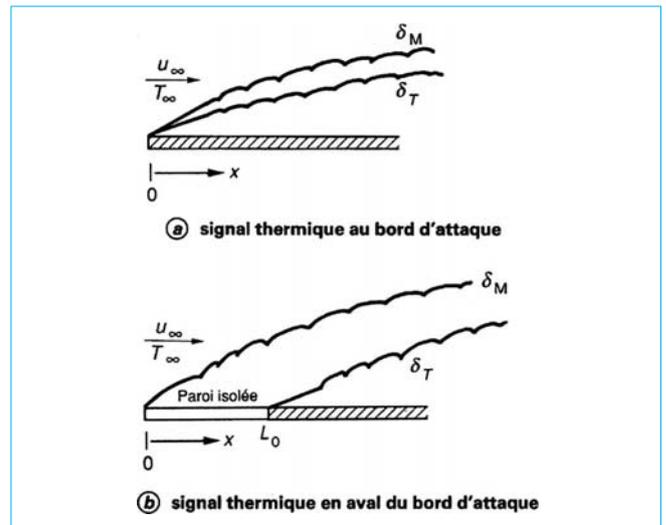


Figure 8 - Plaque plane. Écoulement turbulent

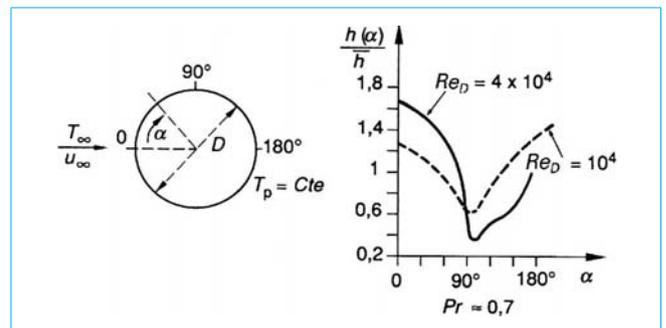


Figure 9 - Cylindre d'axe perpendiculaire à l'écoulement

● Pour les autres fluides ( $Pr > 1$ ),  $\overline{Nu}_L$  peut être estimé par la même formule en la multipliant par  $Pr^{1/3}$ .

### 6.1.2 Cylindre d'axe perpendiculaire à l'écoulement (figure 9)

Pour  $0 \leq \alpha \leq 80^\circ$  (Martinelli *et al.* [24]) :

$$Nu_D(\alpha) = \frac{h(\alpha)D}{\lambda} = 1,05 \left[ 1 - \left( \frac{\alpha}{90} \right)^3 \right] Re_D^{1/2} Pr^{1/3}$$

avec degré de turbulence amont < 1 %.

Les propriétés physiques du fluide sont évaluées à  $\frac{T_p + T_\infty}{2}$

$$\overline{Nu}_D = \frac{\overline{h}D}{\lambda} = C \cdot Re_D^n$$

avec  $C$  et  $n$  coefficients donnés dans le tableau ci-après :

$Re_D$	$n$	$C$	
		Gaz	Liquide
1 à 4	0,330	0,891	0,989 $Pr^{1/3}$
4 à 40	0,385	0,821	0,911 $Pr^{1/3}$
40 à 4 000	0,466	0,615	0,683 $Pr^{1/3}$
4 000 à 40 000	0,618	0,174	0,193 $Pr^{1/3}$
40 000 à 250 000	0,805	0,023 9	0,026 6 $Pr^{1/3}$

### 6.1.3 Cylindres de sections diverses à température $T_p$ constante sur toutes les faces

$$\overline{Nu}_D = \frac{\overline{h}D}{\lambda} = C Re_D^m Pr^{0,35}$$

avec  $C$ ,  $m$  coefficients donnés dans le tableau 3.

### 6.1.4 Sphère (figure 10)

La convection naturelle est négligeable si :

$$\frac{Gr}{Re^2} < 1,5$$

#### ■ Au point de stagnation ( $\alpha = 0$ )

Si  $4,4 \times 10^4 \leq Re \leq 1,5 \times 10^5$  :

$$Nu_{\alpha=0} = 0,37 Re^{0,53}$$

#### ■ Nombre de Nusselt moyen

– Si  $1 \leq Re \leq 7 \times 10^4$ ,  $0,6 \leq Pr \leq 400$  (Froessling [2]) :

$$\overline{Nu} = 2,0 + 0,60 Pr^{1/3} Re^{1/2}$$

– Si  $0,6 \leq Pr \leq 380$ ,  $10 \leq Re \leq 10^5$  (Kramers [25]) :

$$\overline{Nu} = 2,0 + 1,3 Pr^{0,15} + 0,66 Pr^{0,31} Re^{0,5}$$

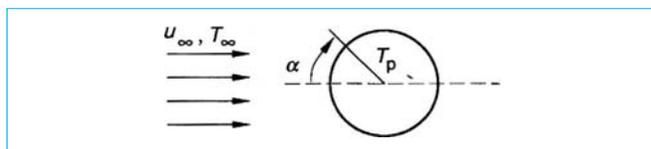


Figure 10 – Sphère

– Quelle que soit la valeur de  $Re$  (Katsnel'son et Timofeyeva [4]) :

$$\overline{Nu} = 2,0 + 0,03 Pr^{0,33} Re^{0,54} + 0,35 Pr^{0,36} Re^{0,58}$$

– Si  $1 < Re < 25$  (Kreith [2]) :

$$\overline{Nu} = 2,2 Pr + 0,48 Re^{0,5} Pr$$

– Si  $0,6 < Pr < 380$  et  $3,5 < Re < 7,6 \times 10^4$  (Whitaker [3]) :

$$\overline{Nu} = 2 + Pr^{0,4} (0,4 Re^{0,5} + 0,06 Re^{0,67}) \left( \frac{\mu_p}{\mu_\infty} \right)^{0,25}$$

avec  $\mu_\infty$  et  $\mu_p$  viscosités évaluées à la température au loin  $T_\infty$  et à la température de paroi  $T_p$ .

## 6.2 Convection forcée interne

### 6.2.1 Tube circulaire

#### 6.2.1.1 Écoulement laminaire

$$\frac{L_h}{D_h} = 0,59 + 0,056 Re_{D_h}$$

$$\frac{L_h}{D_h} = 0,057 5 Re_{D_h}$$

#### 6.2.1.1.1 Profils des vitesses et des températures établis

$$T_p = Cte \Rightarrow \overline{Nu}_T = 3,66$$

$$\varphi_p = Cte \Rightarrow \overline{Nu}_\varphi = \frac{48}{11} = 4,363$$

#### 6.2.1.1.2 Profil des vitesses établi et profil des températures en cours d'établissement

#### ■ Tube isotherme ( $T_p = Cte$ ), problème de Graetz

Nota : Graetz a étudié les longueurs d'établissement dans le cas  $T_p = Cte$  et défini un nombre caractéristique des similitudes (nombre de Graetz :  $Gz$ ).

#### ● Nombre de Nusselt local :

$$Nu_{D_h}(x) = \frac{h(x)D_h}{\lambda} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} G_n \exp(-\lambda_n^2 x^+)}{2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G_n}{\lambda_n^2} \exp(-\lambda_n^2 x^+)}$$

$$\text{avec } x^+ = \frac{x}{R \cdot Pe_{D_h}}$$

$G_n$  et  $\lambda_n$  coefficients définis :

– pour  $0 \leq n \leq 4$ , dans le tableau ci-après :

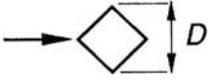
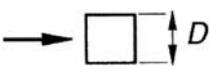
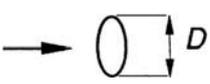
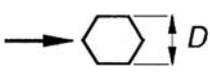
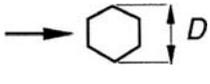
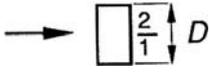
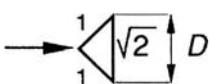
$n$	$\lambda_n^2$	$G_n$
0	7,312	0,749
1	44,62	0,544
2	113,8	0,463
3	215,2	0,414
4	348,5	0,382

– pour  $n > 2$  par les expressions ci-après :

$$\lambda_n = 4n + 8/3$$

$$G_n = 1,012 76 \lambda_n^{-1/3}$$

**Tableau 3 – Cylindres de sections diverses. Valeurs des coefficients C et m**

Sections (1)	$Re_D$	C	m	Référence
	$5 \times 10^3$ à $10^5$	0,25	0,588	Hilpert [21]
	$\left\{ \begin{array}{l} 2,5 \times 10^3 \\ 5 \times 10^3 \end{array} \right.$ à $\left\{ \begin{array}{l} 8 \times 10^3 \\ 10^5 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0,180 \\ 0,104 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0,699 \\ 0,675 \end{array} \right.$	Reiher [22]
	$2,5 \times 10^3$ à $1,5 \times 10^4$	0,25	0,612	Reiher [22]
	$3 \times 10^3$ à $1,5 \times 10^4$	0,096	0,804	Reiher [22]
	$5 \times 10^3$ à $10^5$	0,156	0,638	Hilpert [21]
	$\left\{ \begin{array}{l} 5 \times 10^3 \\ 1,95 \times 10^4 \end{array} \right.$ à $\left\{ \begin{array}{l} 19,5 \times 10^4 \\ 10^5 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0,162 \\ 0,039 \end{array} \right.$ 5	$\left\{ \begin{array}{l} 0,638 \\ 0,782 \end{array} \right.$	Hilpert [21] Hilpert [21]
	$3 \times 10^3$ à $2 \times 10^4$	0,264	0,66	.....
	$4 \times 10^3$ à $1,5 \times 10^4$	0,232	0,731	Reiher[22]
	$3 \times 10^3$ à $2 \times 10^4$	0,246	0,61	.....

(1) Les flèches → indiquent la direction de l'écoulement.

**Expressions approchées** ( $\pm 0,5\%$ ) (Shah [29]) :

– si  $x^+ \leq 0,02$  :

$$Nu_{D_h}(x) = 1,357(x^+)^{-1/3} - 0,7$$

– si  $x^+ > 0,02$  :

$$Nu_{D_h}(x) = 3,657 + 9,641(10^3 x^+)^{-0,488} \exp - 28,6 x^+$$

● **Nombre de Nusselt moyen** entre 0 et  $x^+$  :

$$Nu_m = \frac{\bar{h} D_h}{\lambda} = \frac{1}{2 x^+} \ln \left[ \frac{1}{8 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G_n}{\lambda_n^2} \exp(-\lambda_n^2 x^+)} \right]$$

Le tableau ci-après précise l'évolution de  $Nu_{D_h}(x)$  et  $Nu_m$  en fonction de la valeur de  $x^+$  :

$x^+$	$Nu_{D_h}(x)$	$Nu_m$
0	$\infty$	$\infty$
0,001	12,86	22,96
0,004	7,91	12,59
0,01	5,99	8,99
0,04	4,18	5,87
0,08	3,79	4,89
0,10	3,71	4,66
0,20	3,66	4,16
$\infty$	3,66	3,66

**Expressions approchées ( $\pm 3\%$ ) (Shah [29]) :**

– si  $x^+ \leq 0,01$  :

$$Nu_m = 2,035 (x^+)^{-1/3} - 0,7$$

– si  $0,01 < x^+ < 0,06$  :

$$Nu_m = 2,035 (x^+)^{-1/3} - 0,2$$

– si  $x^+ \geq 0,06$  :

$$Nu_m = 3,657 + \frac{0,0998}{x^+}$$

● **Longueur d'établissement thermique** (Shah [29]) :

$$L_{th}^* = \frac{L_{th}}{D_h \cdot Pe_{D_h}} = 0,0335$$

■ **Tube à flux surfacique constant :  $\varphi_p = Cte$**

● **Nombre de Nusselt local :**

$$Nu_{D_h}(x) = \frac{h(x) D_h}{\lambda} = \left[ \frac{11}{48} - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\exp(-\gamma_m^2 x^+)}{A_m \gamma_m^4} \right]^{-1}$$

avec  $x^+ = \frac{x}{R \cdot Pe_{D_h}}$

$\gamma_m$  et  $A_m$  coefficients définis :

– pour  $1 \leq m \leq 5$ , dans le tableau ci-après :

$m$	$\gamma_m^2$	$A_m$
1	25,68	$7,63 \times 10^{-3}$
2	83,86	$2,058 \times 10^{-3}$
3	174,2	$0,901 \times 10^{-3}$
4	296,5	$0,487 \times 10^{-3}$
5	450,9	$0,297 \times 10^{-3}$

– pour  $m > 5$  par les expressions ci-après :

$$\gamma_m = 4m + 4/3$$

$$A_m = 0,358 \gamma_m^{-2,32}$$

**Expressions approchées à  $\pm 1\%$  (Shah, Grigull et Tratz [30]) :**

– si  $x^+ \leq 0,0001$  :

$$Nu_{D_h}(x) = 1,640 (x^+)^{-1/3} - 1$$

– si  $0,0001 < x^+ \leq 0,003$  :

$$Nu_{D_h}(x) = 1,640 (x^+)^{-1/3} - 0,5$$

– si  $x^+ > 0,003$  :

$$Nu_{D_h}(x) = 4,364 + 12,327 (10^3 x^+)^{-0,506} \exp(-20,5 x^+)$$

● **Nombre de Nusselt moyen entre 0 et  $x^+$  :**

**Expressions approchées à  $\pm 3\%$  (Shah [29]) :**

– si  $x^+ \leq 0,06$  :

$$Nu_m = \frac{\bar{h} D_h}{\lambda} = 2,461 (x^+)^{-1/3}$$

– si  $x^+ > 0,06$  :

$$Nu_m = 4,364 + \frac{0,1444}{x^+}$$

● **Longueur d'établissement thermique** (Shah [29]) :

$$\frac{L_{th}}{D_h \cdot Pe_{D_h}} = 0,0431$$

**6.2.1.1.3 Profils des vitesses et des températures en cours d'établissement**

■ **Tube isotherme :  $T_p = Cte$**

● **Nombres de Nusselt local et moyen** (figure 11 et tableau 4).

● **Longueur d'établissement thermique :**

$$\frac{L_{th}}{D_h \cdot Pe_{D_h}} = \begin{cases} 0,037 & \text{pour } Pr = 0,7 \\ 0,033 & \text{pour } Pr = \infty \end{cases}$$

■ **Tube à flux surfacique constant :  $\varphi_p = Cte$**

● **Nombre de Nusselt local** (tableau 5).

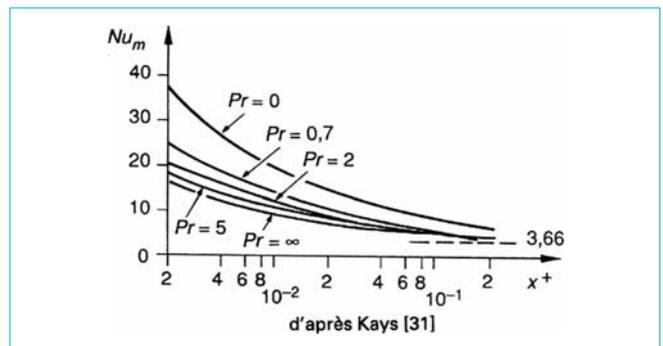


Figure 11 – Évolution du nombre de Nusselt moyen pendant l'établissement thermique et hydraulique

**Tableau 4 – Valeurs du nombre de Nusselt pour différents nombres de Prandtl, pendant l'établissement thermique et hydraulique à température  $T_p$  constante (§ 6.2.1.1.3)**

$x^+$	$Nu_{D_h}(x)$			$Nu_m$		
	$Pr = 0,7$	$Pr = 2$	$Pr = 5$	$Pr = 0,7$	$Pr = 2$	$Pr = 5$
$4 \times 10^{-4}$	24,8	21,2	18,9	44,1	36,4	30,3
$8 \times 10^{-4}$	18,6	16,2	14,7	33,6	27,7	24,0
$1,2 \times 10^{-3}$	15,5	13,8	12,7	28,1	23,4	20,7
$1,6 \times 10^{-3}$	13,7	12,4	11,5	24,6	20,8	18,4
$2 \times 10^{-3}$	12,6	11,4	10,6	22,2	19,1	16,9
$4 \times 10^{-3}$	9,6	8,8	8,2	16,7	14,4	12,8
$8 \times 10^{-3}$	7,3	6,8	6,5	12,4	11,1	9,9
$1,2 \times 10^{-2}$	6,25	5,8	5,7	10,6	9,5	8,6
$1,6 \times 10^{-2}$	5,6	5,3	5,27	9,5	8,5	7,7
$2 \times 10^{-2}$	5,25	4,93	4,92	8,7	7,8	7,2
$3 \times 10^{-2}$	4,6	4,44	4,44	7,5	6,8	6,3
$4 \times 10^{-2}$	4,28	4,17	4,17	6,8	6,2	5,8
$\infty$	3,66	3,66	3,66	3,66	3,66	3,66

D'après Hornbeck [32].

**Tableau 5 – Valeurs du nombre de Nusselt local, pour différents nombres de Prandtl, pendant l'établissement thermique et hydraulique à  $\varphi_p$  constant (§ 6.2.1.1.3)**

$x^+$	$Nu_{D_h}(x)$		
	$Pr = 0,01$	$Pr = 0,7$	$Pr = 10$
0,000 2	.....	51,9	39,1
0,002	24,2	17,8	14,3
0,01	12,0	9,12	7,87
0,02	9,10	7,14	6,32
0,10	6,08	4,72	4,51
0,20	5,73	4,41	4,38
$\infty$	4,36	4,36	4,36

D'après Heaton, Reynolds et Kays [33].

● *Longueur d'établissement thermique :*

$$\frac{L_{th}}{D_h \cdot Pe_{D_h}} = \begin{cases} 0,053 & \text{pour } Pr = 0,7 \\ 0,043 & \text{pour } Pr = \infty \end{cases}$$

**6.2.1.2 Écoulement turbulent**

Lorsque l'écoulement est turbulent, le nombre de Reynolds est tel que :

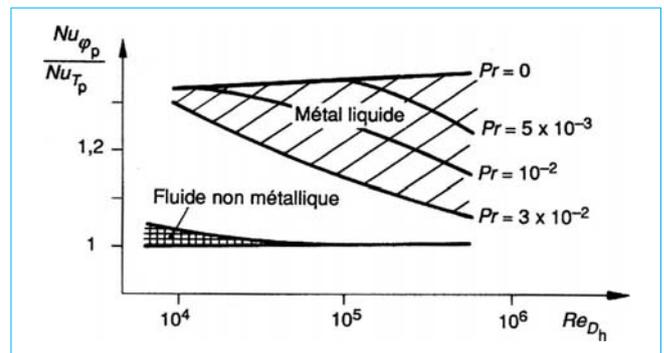
$$Re_{D_h} \geq 2\,500$$

**6.2.1.2.1 Profils des vitesses et des températures établis**

Le **nombre de Nusselt moyen** dépend peu des conditions thermiques aux parois pour des fluides de  $Pr \geq 0,7$  (figure 12) :

$$Nu_{(\varphi_p)} \approx Nu_{(T_p)}$$

La **longueur d'établissement thermique** en écoulement turbulent est bien plus petite qu'en écoulement laminaire, ce qui explique que



**Figure 12 – Comparaison du rapport des nombres de Nusselt à température et à flux surfacique constants pour différents nombres de Prandtl**

la valeur asymptotique du nombre de Nusselt est fréquemment utilisée depuis l'entrée du tube.

a) Si  $\frac{L}{D_h} \geq 60$  :

– équation de Dittus-Boelter [19] :

si  $0,7 \leq Pr \leq 120$  et  $10^4 \leq Re_{D_h} \leq 1,2 \times 10^5$  :

$$\overline{Nu}_{D_h} = 0,023 Re_{D_h}^{0,8} Pr^{0,4}$$

– équation de Colburn [17] :

si  $Pr \geq 0,5$  (fluide non métallique) :

$$\overline{Nu}_{D_h} = 0,023 Re_{D_h}^{0,8} Pr^{1/3}$$

– pour les gaz ( $0,5 \leq Pr \leq 1$ ) dans le domaine où  $Nu_{(\varphi_p)} \neq Nu_{(T)}$ , on emploie :

• quand le flux surfacique est constant ( $\varphi_p = Cte$ ) :

$$\overline{Nu}_{D_h} = 0,022 Re_{D_h}^{0,8} Pr^{0,6}$$

- quand la paroi est isotherme ( $T_p = Cte$ ) :

$$\overline{Nu}_{D_h} = 0,021 Re_{D_h}^{0,8} Pr^{0,6}$$

- b) Si  $20 \leq \frac{L}{D_h} < 60$  :

$$\overline{Nu}_{D_h,L} = \overline{Nu}_{D_h} \left( 1 + 6 \frac{D_h}{L} \right)$$

- c) Si  $2 \leq \frac{L}{D_h} < 20$  :

$$\overline{Nu}_{D_h,L} = \overline{Nu}_{D_h} \left[ 1 + \left( \frac{D_h}{L} \right)^{0,7} \right]$$

$Nu_{D_h}$  étant dans ce cas et le cas *b* le nombre de Nusselt moyen du tube long ( $\frac{L}{D_h} > 60$ ) défini dans le cas *a*.

- d) Pour les métaux liquides (*Pr* très faible)

– équation de Lyon [18] quand le flux surfacique est constant ( $\varphi_p = Cte$ ) :

$$\overline{Nu}_{D_h} = 7 + 0,025 Pe_{D_h}^{0,8}$$

– équation de Séban-Shimazaki [20] quand la paroi est isotherme ( $T_p = Cte$ ) :

$$\overline{Nu}_{D_h} = 4,8 + 0,025 Pe_{D_h}^{0,8}$$

**6.2.1.2.2 Profil des vitesses établi et profil des températures en cours d'établissement**

Les solutions sont obtenues de la même manière qu'en écoulement laminaire (§ 6.2.1.1.2).

**■ Tube isotherme ( $T_p = Cte$ )**

- Nombre de Nusselt local : Sleicher et Tribus [34] donnent :

$$Nu_{D_h}(x) = \frac{h(x) D_h}{\lambda} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} G_n \exp(-\lambda_n^2 x^+)}{2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G_n}{\lambda_n^2} \exp(-\lambda_n^2 x^+)}$$

avec  $G_n$  et  $\lambda_n$  coefficients définis dans le tableau 6.

- Nombre de Nusselt moyen :

$$Nu_m = \frac{\bar{h} D_h}{\lambda} = \frac{1}{2x^+} \ln \left[ \frac{1}{8 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G_n}{\lambda_n^2} \exp(-\lambda_n^2 x^+)} \right]$$

- Nombre de Nusselt établi :

si  $x^+ \rightarrow \infty$  :

$$Nu_{\infty} = \frac{\lambda_0^2}{2}$$

**■ Tube à flux surfacique constant ( $\varphi_p = Cte$ )**

- Nombre de Nusselt local : Sparrow, Hallman et Siegel [35] proposent :

$$Nu_{D_h}(x) = \frac{1}{\frac{1}{Nu_{\infty}} - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\exp(-\gamma_m^2 x^+)}{A_m \gamma_m^4}}$$

avec  $\gamma_m$  et  $A_m$  coefficients définis dans le tableau 6.

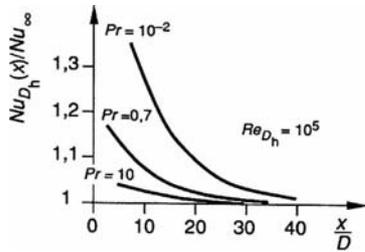
- Nombre de Nusselt établi : donné par les formules des profils des vitesses et des températures établis (§ 6.2.1.2.1) ou par :

$$Nu_{\infty} = \left[ 16 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G_n}{\lambda_n^4} \right]^{-1}$$

**Tableau 6 – Valeurs des différents paramètres pour le calcul du nombre de Nusselt au paragraphe 6.2.1.2.2**

Re	n m	Pr = 10 <sup>-2</sup>				Pr = 0,7				Pr = 10	
		$\lambda_n^2$	$G_n$	$\gamma_m^2$	$A_m$ (en 10 <sup>-3</sup> )	$\lambda_n^2$	$G_n$	$\gamma_m^2$	$A_m$ (en 10 <sup>-5</sup> )	$\gamma_m^2$ (en 10 <sup>4</sup> )	$A_m$ (en 10 <sup>-6</sup> )
5 × 10 <sup>4</sup>	0	11,7	1,11	.....	.....	235	28,6	.....	.....	.....	.....
	1	65	0,95	34,5	6,45	2 640	5,51	1 947	7,51	2,736	5,021
	2	163	0,88	113	1,81	7 400	3,62	5 230	1,97	7,316	1,21
	3	305	0,835	237	0,828	.....	.....	9 875	0,8	13,73	0,436
	4	491	0,802	406	0,468	.....	.....	15 900	0,402	21,96	0,187
10 <sup>5</sup>	5	722	0,777	621	0,299	.....	.....	23 270	0,228	31,98	0,087 9
	0	13,2	1,3	.....	.....	400	49	.....	.....	.....	.....
	1	74	1,04	40,9	5,39	4 430	9,12	3 557	4,12	5,04	2,78
	2	190	0,935	135	1,40	12 800	5,66	9 530	1,08	13,46	0,697
	3	360	0,869	284	0,625	.....	.....	17 970	0,443	25,28	0,268
2 × 10 <sup>5</sup>	4	583	0,823	488	0,326	.....	.....	28 840	0,226	40,46	0,126
	5	860	0,788	746	0,204	.....	.....	42 230	0,130	59,04	0,065 6
	0	16,9	1,7	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
	1	96	1,24	55,5	3,86	.....	.....	.....	.....	.....	.....
	2	247	1,07	181	0,989	.....	.....	.....	.....	.....	.....
.....	3	467	0,978	376	0,449	.....	.....	.....	.....	.....	.....
	4	757	0,901	642	0,252	.....	.....	.....	.....	.....	.....
	5	1 116	0,847	980	0,160	.....	.....	.....	.....	.....	.....

● Longueur d'établissement thermique pour  $\varphi_p = Cte$ .



pour  $Pr = 0,7$ , la longueur d'établissement est pratiquement indépendante de  $Re$  dans le domaine  $5 \times 10^4 < Re < 2 \times 10^5$ .

**6.2.2 Canal rectangulaire**

$$\xi = \frac{b}{a}$$

$$D_h = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2b}{1+\xi}$$

$\xi \rightarrow 0$  pour des plaques parallèles infinies.

**6.2.2.1 Écoulement laminaire**

**6.2.2.1.1 Profils des vitesses et des températures établis**

■ Canal rectangulaire isotherme ( $T_p = Cte$ )

Le nombre de Nusselt moyen est donné par le tableau 7 :

$$\overline{Nu}_{D_h} = \frac{\bar{h} D_h}{\lambda}$$

Expression approchée à  $\pm 0,1\%$  : pour le cas où les 4 parois sont à  $T_p$  :

$$\overline{Nu}_{D_h} = 7,541 [1 - 2,610 \xi + 4,970 \xi^2 - 5,119 \xi^3 + 2,702 \xi^4 - 0,548 \xi^5]$$

■ Canal rectangulaire à flux surfacique constant ( $\varphi_p = Cte$ )

Le nombre de Nusselt moyen est donné par le tableau 7 :

$$\overline{Nu}_{D_h} = \frac{\bar{h} D_h}{\lambda}$$

Expression approchée à  $\pm 0,03\%$  : pour le cas où les 4 parois sont soumises au flux  $\varphi_p$  :

$$\overline{Nu}_{D_h} = 8,235 [1 - 2,042 \xi + 3,085 \xi^2 - 2,476 \xi^3 + 1,057 \xi^4 - 0,186 \xi^5]$$

**6.2.2.1.2 Profil des vitesses établi et profil des températures en cours d'établissement**

La valeur  $x^*$ , que nous utiliserons, est la distance axiale sans dimension :

$$x^* = \frac{x}{D_h \cdot Pe_{D_h}}$$

■ Canal rectangulaire isotherme

Pour  $T_p = Cte$  sur les 4 parois, les valeurs du nombre de Nusselt sont données par le tableau 8.

■ Canal rectangulaire à flux surfacique constant

Pour  $\varphi_p = Cte$  sur les 4 parois, les valeurs du nombre de Nusselt sont également données par le tableau 8.

**Tableau 7 – Valeurs du nombre de Nusselt moyen ( $\overline{Nu}_{D_h}$ ) pour un canal rectangulaire avec profils des vitesses et des températures établis (d'après Schmidt [7])**

$\xi$	$T_p = Cte$					$\varphi_p = Cte$				
0	7,541	7,541	7,541	0	4,861	8,235	8,235	8,235	0	5,385
0,1	5,858	6,095	6,399	0,457	3,823	6,7	6,939	7,248	0,538	4,410
0,2	4,803	5,195	5,703	0,833	3,330	5,704	6,072	6,561	0,964	3,914
0,3	4,114	4,579	5,224	1,148	2,996	4,969	5,393	5,997	1,312	3,538
0,4	3,670	4,153	4,884	1,416	2,768	4,457	4,885	5,555	1,604	3,279
0,5	3,383	3,842	4,619	1,647	2,613	4,111	4,505	5,203	1,854	3,104
0,6	3,198	.....	.....	.....	2,509	3,884	.....	.....	.....	2,987
0,7	3,083	3,408	4,192	2,023	2,442	3,740	3,991	4,662	2,263	2,911
0,8	3,014	.....	.....	.....	2,401	3,655	.....	.....	.....	2,866
0,9	2,98	.....	.....	.....	2,381	3,612	.....	.....	.....	2,843
1,0	2,970	3,018	3,703	2,437	2,375	3,599	3,556	4,094	2,712	2,836
2	3,383	3,842	4,619	1,647	2,613	4,111	4,505	5,203	1,854	3,104
5	4,803	5,195	5,703	0,833	3,330	5,704	6,072	6,561	0,964	3,914
10	5,858	6,095	6,399	0,457	3,823	6,7	6,939	7,248	0,538	4,410
∞	7,541	7,541	7,541	0	4,861	8,235	8,235	8,235	0	5,385

Paroi adiabatique (isolée).

**Tableau 8 – Valeurs du nombre de Nusselt pour un canal rectangulaire avec profil des vitesses établi et profil des températures en cours d'établissement (d'après Wibulswas [9])**

1/x*	ξ = 1	0,5	1/3	0,25	0,2	1/6	ξ = 1	0,5	1/3	0,25
	Nu <sub>D<sub>h</sub></sub> (x) à T <sub>p</sub> = Cte (sur les 4 parois)						Nu <sub>D<sub>h</sub></sub> (x) à φ <sub>p</sub> = Cte (sur les 4 parois)			
0	2,65	3,39	3,96	4,51	4,92	5,22	3,60	4,11	4,77	5,35
10	2,86	3,43	4,02	4,53	4,94	5,24	3,71	4,22	4,85	5,45
20	3,08	3,54	4,17	4,65	5,04	5,34	3,91	4,38	5,00	5,62
30	3,24	3,70	4,29	4,76	5,31	5,41	4,18	4,61	5,17	5,77
40	3,43	3,85	4,42	4,87	5,22	5,48	4,45	4,84	5,39	5,87
60	3,78	4,16	4,67	5,08	5,40	5,64	4,91	5,28	5,82	6,26
80	4,10	4,46	4,94	5,32	5,62	5,86	5,33	5,70	6,21	6,63
100	4,35	4,72	5,17	5,55	5,83	6,07	5,69	6,05	6,57	7,00
120	4,62	4,93	5,42	5,77	6,06	6,27	6,02	6,37	6,92	7,32
140	4,85	5,15	5,62	5,98	6,26	6,47	6,32	6,68	7,22	7,63
160	5,03	5,34	5,80	6,18	6,45	6,66	6,60	6,96	7,50	7,92
180	5,24	5,54	5,99	6,37	6,63	6,86	6,86	7,23	7,76	8,18
200	5,41	5,72	6,18	6,57	6,80	7,02	7,10	7,46	8,02	8,44
	Nu <sub>m</sub> à T <sub>p</sub> = Cte (sur les 4 parois)						Nu <sub>m</sub> à φ <sub>p</sub> = Cte (sur les 4 parois)			
0	2,65	3,39	3,96	4,51	4,92	5,22	3,60	4,11	4,77	5,35
10	3,50	3,95	4,54	5,00	5,36	5,66	4,48	4,94	5,45	6,03
20	4,03	4,46	5,00	5,44	5,77	6,04	5,19	5,60	6,06	6,57
30	4,47	4,86	5,39	5,81	6,13	6,37	5,76	6,16	6,60	7,07
40	4,85	5,24	5,74	6,16	6,45	6,70	6,24	6,64	7,09	7,51
60	5,50	5,85	6,35	6,73	7,03	7,26	7,02	7,45	7,85	8,25
80	6,03	6,37	6,89	7,24	7,53	7,77	7,66	8,10	8,48	8,87
100	6,46	6,84	7,33	7,71	7,99	8,17	8,22	8,66	9,02	9,39
120	6,86	7,24	7,74	8,13	8,39	8,63	8,69	9,13	9,52	9,83
140	7,22	7,62	8,11	8,50	8,77	9,00	9,09	9,57	9,93	10,24
160	7,56	7,97	8,45	8,86	9,14	9,35	9,50	9,96	10,31	10,61
180	7,87	8,29	8,77	9,17	9,46	9,67	9,85	10,31	10,67	10,92
200	8,15	8,58	9,07	9,47	9,79	10,01	10,18	10,64	10,97	11,23

■ **Longueur d'établissement thermique** (d'après Shah et London [7]) :

ξ	L <sub>th</sub> *	
	T <sub>p</sub> = Cte	φ <sub>p</sub> = Cte
0	8 × 10 <sup>-3</sup>	1,15 × 10 <sup>-2</sup>
0,25	5,4 × 10 <sup>-2</sup>	4,2 × 10 <sup>-2</sup>
1/3	.....	4,8 × 10 <sup>-2</sup>
0,5	4,9 × 10 <sup>-2</sup>	5,7 × 10 <sup>-2</sup>
1	4,1 × 10 <sup>-2</sup>	6,6 × 10 <sup>-2</sup>

avec  $L_{th}^* = \frac{L_{th}}{D_h \cdot Pe_{D_h}}$  longueur d'établissement thermique sans dimension.

**6.2.2.1.3 Profils des vitesses et des températures en cours d'établissement**

■ **Canal rectangulaire isotherme**

Pour T<sub>p</sub> = Cte sur les 4 parois, avec un nombre de Prandtl de 0,72, les valeurs du nombre de Nusselt sont données par le tableau 9.

■ **Canal rectangulaire à flux surfacique constant**

Pour φ<sub>p</sub> = Cte sur les 4 parois, les valeurs du nombre de Nusselt sont données par le tableau 9, pour un nombre de Prandtl de 0,72, et par le tableau 10 pour ξ = 0,5.

■ **Longueur d'établissement thermique** (d'après Shah et London [7]) :

ξ	L <sub>th</sub> * à φ <sub>p</sub> = Cte pour Pr = 0,72
0	0,017
0,25	0,136
1/3	0,17
0,5	0,23
1	0,34

avec  $L_{th}^* = \frac{L_{th}}{D_h \cdot Pe_{D_h}}$  longueur d'établissement thermique sans dimension.

**6.2.2.2 Écoulement turbulent**

■ Équation de Sieder et Tate [2] [3] :

$$\overline{Nu}_b = 0,027 Re_b^{0,8} Pr^{1/3} \left(\frac{\mu_m}{\mu_p}\right)^{0,14}$$

avec μ<sub>m</sub> et μ<sub>p</sub> viscosités prises à la température moyenne et à la température de paroi, respectivement.

**Tableau 9 – Valeurs du nombre de Nusselt pour un canal rectangulaire avec profils des vitesses et des températures en cours d'établissement ( $Pr = 0,72$ ) (d'après Wibulswas [9])**

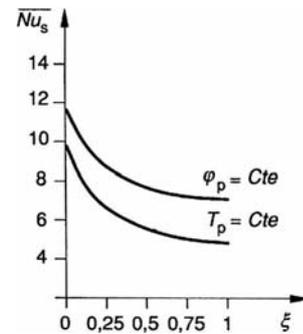
$Pr = 0,72$	$\xi = 1$	0,5	1/3	0,25	1/6
$x^*$	$Nu_{D_h}(x)$ à $\varphi_p = Cte$ sur les 4 parois				
$5 \times 10^{-3}$	9,69	9,88	10,06	10,24	
$5,56 \times 10^{-3}$	9,28	9,47	9,70	9,87	
$6,25 \times 10^{-3}$	8,84	9,05	9,38	9,59	
$7,14 \times 10^{-3}$	8,38	8,61	8,84	9,05	
$8,33 \times 10^{-3}$	7,90	8,11	8,37	8,58	
$1 \times 10^{-2}$	7,38	7,59	7,86	8,08	
$1,25 \times 10^{-2}$	6,80	7,02	7,32	7,55	
$1,67 \times 10^{-2}$	6,14	6,42	6,74	7,00	
$2 \times 10^{-2}$	5,83	6,09	6,44	6,70	
$2,5 \times 10^{-2}$	5,47	5,75	6,13	6,43	
$3,33 \times 10^{-2}$	5,07	5,40	5,82	6,17	
$5 \times 10^{-2}$	4,66	5,01	5,50	5,92	
$1 \times 10^{-1}$	4,18	4,60	5,18	5,66	
	$Nu_m(x)$ à $\varphi_p = Cte$ sur les 4 parois				
$4,55 \times 10^{-3}$	15,03	15,36	15,83	16,02	
$5 \times 10^{-3}$	14,55	14,88	15,21	15,49	
$5,56 \times 10^{-3}$	14,05	14,35	14,70	14,95	
$6,25 \times 10^{-3}$	13,50	13,79	14,10	14,48	
$7,14 \times 10^{-3}$	12,87	13,15	13,47	13,73	
$8,33 \times 10^{-3}$	12,19	12,48	12,78	13,03	
$1 \times 10^{-2}$	11,43	11,70	12,00	12,23	
$1,25 \times 10^{-2}$	10,53	10,83	11,13	11,35	
$1,67 \times 10^{-2}$	9,49	9,77	10,07	10,32	
$2 \times 10^{-2}$	8,90	9,17	9,48	9,70	
$2,5 \times 10^{-2}$	8,25	8,54	8,85	9,07	
$3,33 \times 10^{-2}$	7,52	7,83	8,13	8,37	
$5 \times 10^{-2}$	6,60	6,94	7,31	7,58	
$1 \times 10^{-1}$	5,43	5,77	6,27	6,65	
$2 \times 10^{-1}$	4,60	5,00	5,57	6,06	
	$Nu_m$ à $T_p = Cte$ sur les 4 parois				
$4,55 \times 10^{-3}$	9,70	10,00	10,30	10,58	10,90
$5 \times 10^{-3}$	9,30	9,60	9,91	10,18	10,51
$5,56 \times 10^{-3}$	8,91	9,20	9,50	9,77	10,12
$6,25 \times 10^{-3}$	8,50	8,80	9,10	9,36	9,72
$7,14 \times 10^{-3}$	8,06	8,37	8,66	8,93	9,28
$8,33 \times 10^{-3}$	7,61	7,91	8,18	8,48	8,85
$1 \times 10^{-2}$	7,10	7,42	7,70	7,98	8,38
$1,25 \times 10^{-2}$	6,57	6,88	7,17	7,47	7,90
$1,67 \times 10^{-2}$	5,95	6,27	6,60	6,90	7,35
$2 \times 10^{-2}$	5,63	5,95	6,28	6,61	7,07
$2,5 \times 10^{-2}$	5,27	5,61	5,96	6,27	6,78
$3,33 \times 10^{-2}$	4,88	5,23	5,60	5,93	6,47
$5 \times 10^{-2}$	4,39	4,79	5,17	5,56	6,13
$1 \times 10^{-1}$	3,75	4,20	4,67	5,11	5,72
$2 \times 10^{-1}$	.....	.....	.....	.....	.....

**Tableau 10 – Valeurs du nombre de Nusselt moyen pour un canal rectangulaire ( $\xi = 0,5$ ) à flux surfacique constant sur les 4 parois avec profils des vitesses et des températures en cours d'établissement (d'après Wibulswas [9])**

$\xi = 0,5$	$Nu_m$ à $\varphi_p = Cte$ sur les 4 parois				
$x^*$	$Pr = \infty$	10	0,72	0,1	0
$2,5 \times 10^{-3}$	13	15,40	18,50	19,90	20,65
$2,86 \times 10^{-3}$	12,55	14,75	17,75	19,10	19,80
$3,33 \times 10^{-3}$	12,00	14,05	17,00	18,30	18,90
$3,85 \times 10^{-3}$	11,50	13,45	16,25	17,60	18,10
$4,55 \times 10^{-3}$	10,95	12,75	15,35	16,70	17,20
$5,56 \times 10^{-3}$	10,31	11,95	14,35	15,65	16,15
$7,14 \times 10^{-3}$	9,57	11,05	13,15	14,50	14,95
$1 \times 10^{-2}$	8,66	9,90	11,70	13,05	13,50
$1,25 \times 10^{-2}$	8,10	9,20	10,83	12,15	12,65
$1,67 \times 10^{-2}$	7,45	8,40	9,77	11,10	11,65
$2,5 \times 10^{-2}$	6,64	7,50	8,54	9,75	10,40
$5 \times 10^{-2}$	5,60	6,15	6,94	7,90	8,65

■ Pour un métal liquide, on utilise la relation de Hartnett et Irvine [4] :

$$\overline{Nu}_{D_h} = \frac{2}{3} \overline{Nu}_s + 0,015 Pe_{D_h}^{0,8}$$



**6.2.3 Espace annulaire concentrique**

$$D_h = d_e - d_i$$

$$\gamma = \frac{d_i}{d_e}$$

$\gamma = 1$  dans le cas de plaques parallèles.

**6.2.3.1 Écoulement laminaire**

■ Profils des vitesses et des températures établis

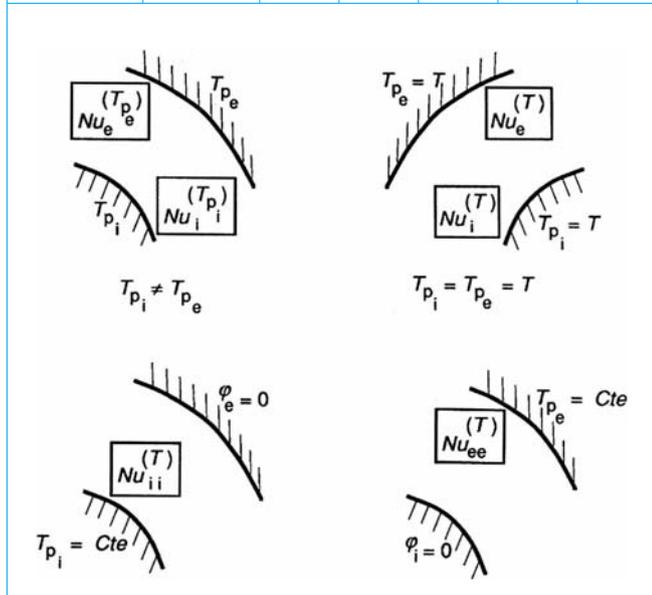
$\frac{L_h}{D_h \cdot Re_{D_h}}$	$\gamma$
.....	0
0,037 5	$10^{-3}$
0,030 3	$10^{-2}$
0,024 1	$5 \times 10^{-2}$
0,021 0	$10^{-1}$
0,017 1	$2 \times 10^{-1}$
0,013 1	$4 \times 10^{-1}$
0,011 8	$8 \times 10^{-1}$

d'après Sparrow et Lin [8].

● Espace annulaire concentrique avec parois isothermes : les valeurs du nombre de Nusselt sont données par le tableau 11.

**Tableau 11 – Valeurs du nombre de Nusselt pour un espace annulaire concentrique avec parois isothermes,**  
(d'après Shah et London [7])

Y	$Nu_i^{(T_{p_i})}$	$Nu_e^{(T_{p_e})}$	$Nu_i^{(T)}$	$Nu_e^{(T)}$	$Nu_{ii}^{(T)}$	$Nu_{ee}^{(T)}$
0	∞	2,67	∞	3,66	∞	3,66
$1 \times 10^{-4}$	2 355,3	2,78	.....	.....	.....	.....
$1 \times 10^{-3}$	322,3	2,82	.....	.....	.....	.....
$1 \times 10^{-2}$	50,5	2,91	.....	.....	.....	.....
$2 \times 10^{-2}$	30,18	2,95	58,08	4,59	32,34	3,99
$4 \times 10^{-2}$	18,61	3,00	.....	.....	.....	.....
$5 \times 10^{-2}$	16,06	3,02	31,23	4,84	17,46	4,06
$6 \times 10^{-2}$	14,28	3,04	.....	.....	.....	.....
$8 \times 10^{-2}$	11,94	3,07	.....	.....	.....	.....
$1 \times 10^{-1}$	10,46	3,10	20,4	5,13	11,56	4,11
$1,5 \times 10^{-1}$	8,34	3,16	.....	.....	.....	.....
$2 \times 10^{-1}$	7,2	3,21	.....	.....	.....	.....
$2,5 \times 10^{-1}$	6,47	3,27	12,63	5,7	7,37	4,23
$3 \times 10^{-1}$	5,97	3,32	.....	.....	.....	.....
$4 \times 10^{-1}$	5,31	3,42	.....	.....	.....	.....
$5 \times 10^{-1}$	4,89	3,52	9,44	6,40	5,74	4,43
$6 \times 10^{-1}$	4,60	3,62	.....	.....	.....	.....
$7 \times 10^{-1}$	4,39	3,72	.....	.....	.....	.....
$8 \times 10^{-1}$	4,23	3,81	.....	.....	.....	.....
$9 \times 10^{-1}$	4,10	3,91	.....	.....	.....	.....
1,00	4,00	4,00	7,54	7,54	4,86	4,86



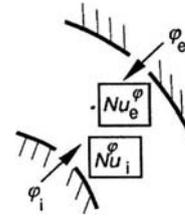
● Espace annulaire concentrique avec parois à flux surfacique constant : les valeurs du nombre de Nusselt, d'après Lundberg *et al.* [11], sont données suivant le cas soit par le tableau 12, soit par les expressions :

$$Nu_i^\phi = \frac{h_i \cdot D_h}{\lambda}$$

$$Nu_e^\phi = \frac{h_e \cdot D_h}{\lambda}$$

$$Nu_i^\phi = \frac{Nu_{ii}^\phi}{1 - \left(\frac{\phi_e}{\phi_i}\right) T_i^*}$$

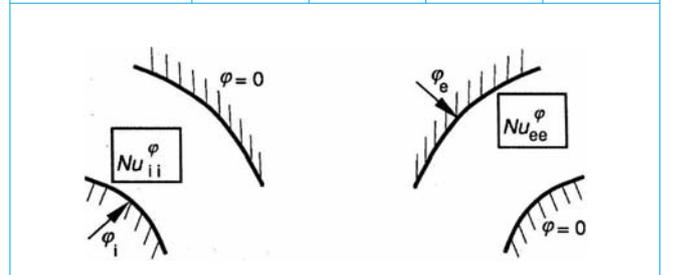
$$Nu_e^\phi = \frac{Nu_{ee}^\phi}{1 - \left(\frac{\phi_i}{\phi_e}\right) T_e^*}$$



Pour les profils d'établissement thermique et hydraulique, on se reportera à l'ouvrage de J. Taine et J.-P. Petit [46].

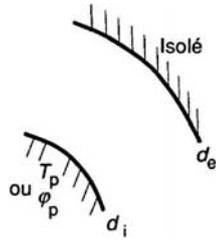
**Tableau 12 – Valeurs du nombre de Nusselt pour un espace annulaire concentrique avec parois à flux surfacique constant**  
(d'après Lundberg *et al.* [11])

Y	$Nu_{ii}^\phi$	$Nu_{ee}^\phi$	$T_i^*$	$T_e^*$
0	∞	4,36	∞	0
$1 \times 10^{-3}$	337,04	4,59	.....	.....
$1 \times 10^{-2}$	54,02	4,69	.....	.....
$2 \times 10^{-2}$	32,71	4,73	.....	.....
$4 \times 10^{-2}$	20,51	4,78	.....	.....
$5 \times 10^{-2}$	17,81	4,79	2,18	0,029 4
$6 \times 10^{-2}$	15,93	4,80	.....	.....
$8 \times 10^{-2}$	13,47	4,80	.....	.....
$1 \times 10^{-1}$	11,91	4,83	1,383	0,056 2
$1,5 \times 10^{-1}$	9,69	4,86	.....	.....
$2 \times 10^{-1}$	8,5	4,88	0,905	0,104 1
$2,5 \times 10^{-1}$	7,75	4,90	.....	.....
$3 \times 10^{-1}$	7,24	4,93	.....	.....
$4 \times 10^{-1}$	6,58	4,98	0,603	0,182 3
$5 \times 10^{-1}$	6,18	5,04	.....	.....
$6 \times 10^{-1}$	5,91	5,10	0,473	0,245 5
$7 \times 10^{-1}$	5,72	5,17	.....	.....
$8 \times 10^{-1}$	5,58	5,24	0,401	0,299
$9 \times 10^{-1}$	5,47	5,31	.....	.....
1,00	5,385	5,385	0,346	0,346



6.2.3.2 Écoulement turbulent

$$\overline{Nu}_{D_h} = 0,023 Re_{D_h}^{0,8} Pr^{1/3} \left(\frac{d_e}{d_i}\right)^{0,14}$$

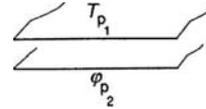


- $\varphi_{p_1} = 0$  (une paroi adiabatique) :

$$\overline{Nu}_1 = 0, \quad \overline{Nu}_2 = \frac{140}{26} = 5,385$$

- $\varphi_{p_2} \neq 0$  :

$$\overline{Nu}_1 = 4, \quad \overline{Nu}_2 = 4$$

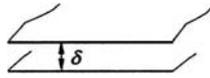


- $\varphi_{p_2} = 0$  :

$$\overline{Nu}_1 = 4,86, \quad \overline{Nu}_2 = 0$$

6.2.4 Plaques parallèles

$$D_h = 2 \delta$$



6.2.4.1 Écoulement laminaire

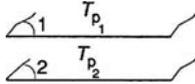
$$\frac{L_h}{D_h} = 0,3125 + 0,011 Re_{D_h}$$

d'après Atkinson *et al.* [40].

6.2.4.1.1 Profils des vitesses et des températures établis

- $T_{p_1} \neq T_{p_2}$  :

$$\overline{Nu}_1 = \overline{Nu}_2 = 4$$



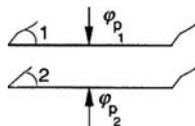
- $T_{p_1} = T_{p_2}$  :

$$\overline{Nu}_1 = \overline{Nu}_2 = 7,54$$

- $\varphi_{p_1} \neq \varphi_{p_2} \neq 0$  :

$$\overline{Nu}_1 = \frac{140}{26 - 9 \frac{\varphi_{p_2}}{\varphi_{p_1}}}$$

$$\overline{Nu}_2 = \frac{140}{26 - 9 \frac{\varphi_{p_1}}{\varphi_{p_2}}}$$



- $\varphi_{p_1} = \varphi_{p_2}$  :

$$\overline{Nu}_1 = \overline{Nu}_2 = \frac{140}{17} = 8,24$$

6.2.4.1.2 Profil des vitesses établi et profil des températures en cours d'établissement

■ Plaques parallèles isothermes

$T_{p_1} = T_{p_2} = T_p = Cte$  problème de Graetz - Nusselt.

- Nombre de Nusselt local :

$$Nu_{D_h}(x) = \frac{h(x) D_h}{\lambda} = \frac{8}{3} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} G_n \exp\left(-\frac{32}{3} \lambda_n^2 x^*\right)}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{G_n}{\lambda_n^2} \exp\left(-\frac{32}{3} \lambda_n^2 x^*\right)}$$

avec  $x^* = \frac{x}{D_h \cdot Pe_{D_h}}$

Expressions approchées à  $\pm 1\%$  (Shah [29]) :

- si  $x^* \leq 10^{-3}$  :

$$Nu_{D_h}(x) = 1,233(x^*)^{-1/3} + 0,4$$

- si  $x^* > 10^{-3}$  :

$$Nu_{D_h}(x) = 7,541 + 6,874(10^3 x^*)^{-0,488} \exp(-245 x^*)$$

- Nombre de Nusselt moyen entre 0 et  $x^*$  :

$$Nu_m = \frac{\bar{h} \cdot D_h}{\lambda} = \frac{1}{4x^*} \ln \left[ \frac{1}{3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G_n}{\lambda_n^2} \exp\left(-\frac{32}{3} \lambda_n^2 x^*\right)} \right]$$

avec  $G_n$  et  $\lambda_n$  coefficients donnés :

- soit par le tableau ci-après pour  $0 \leq n \leq 9$  :

n	$\lambda_n^2$	$G_n$
0	2,828	0,858
1	32,147	0,569
2	93,475	0,476
3	186,796	0,424
4	312,136	0,389
5	469,468	0,363
6	658,8	0,344
7	880,132	0,327
8	1 133,46	0,314
9	1 418,8	0,302

d'après Brown [41].

– soit par les expressions ci-après pour  $n \geq 10$  :

$$\lambda_n = 4n + \frac{5}{3}$$

$$G_n = 1,013 \lambda_n^{-1/3}$$

Expressions approchées à  $\pm 3\%$  (Shah [29]) :

– si  $x^* \leq 5 \times 10^{-4}$  :

$$Nu_m = 1,849 (x^*)^{-1/3}$$

– si  $5 \times 10^{-4} < x^* \leq 6 \times 10^{-3}$  :

$$Nu_m = 1,849 (x^*)^{-1/3} + 0,6$$

– si  $x^* > 6 \times 10^{-3}$  :

$$Nu_m = 7,541 + \frac{0,0235}{x^*}$$

● **Longueur d'établissement thermique** (Shah [29]) :

$$\frac{L_{th}}{D_h \cdot Pe_{D_h}} = 8 \times 10^{-3}$$

■ **Plaques parallèles à flux surfacique constant**

$$\varphi_{p_1} = \varphi_{p_2} = \varphi_p = Cte$$

● **Nombre de Nusselt local** :

$$Nu_{D_h}(x) = \left[ \frac{17}{140} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp\left(-\frac{32}{3} \beta_n^2 x^*\right) \right]^{-1}$$

avec  $x^* = \frac{x}{D_h \cdot Pe_{D_h}}$

$C_n$  et  $\beta_n$  coefficients donnés :

– soit par le tableau ci-après pour  $1 \leq n \leq 10$  :

$n$	$\beta_n^2$	$-C_n$
1	18,38	0,222 2
2	68,952	0,072 5
3	151,551	0,037 4
4	266,163	0,023 3
5	412,785	0,016 1
6	591,409	0,011 9
7	802,039	0,009 2
8	1 044,67	0,007 4
9	1 319,31	0,006 1
10	1 625,95	0,005 1

d'après Sparrow *et al.* [42].

– soit par les expressions ci-après pour  $n > 10$  :

$$\beta_n = 4n + 1/3$$

$$C_n = -2,401 \beta_n^{-5/3}$$

Expressions approchées à  $\pm 8\%$  (Shah [29]) :

– si  $x^* \leq 2 \times 10^{-4}$  :

$$Nu_{D_h}(x) = 1,490 (x^*)^{-1/3}$$

– si  $2 \times 10^{-4} < x^* \leq 10^{-3}$  :

$$Nu_{D_h}(x) = 1,490 (x^*)^{-1/3} - 0,4$$

– si  $x^* > 10^{-3}$  :

$$Nu_{D_h}(x) = 8,235 + 8,68(10^3 x^*)^{-0,506} \exp - 164 x^*$$

● **Nombre de Nusselt moyen** entre 0 et  $x^*$

Expressions approchées à  $\pm 2,5\%$  (Shah [29]) :

– si  $x^* \leq 10^{-3}$  :

$$Nu_m = \frac{\bar{h} \cdot D_h}{\lambda} = 2,236 (x^*)^{-1/3}$$

– si  $10^{-3} < x^* < 10^{-2}$  :

$$Nu_m = 2,236 (x^*)^{-1/3} + 0,9$$

– si  $x^* \geq 10^{-2}$  :

$$Nu_m = 8,235 + \frac{0,0364}{x^*}$$

● **Longueur d'établissement thermique** (Shah [29]) :

$$\frac{L_{th}}{D_h \cdot Pe_{D_h}} = 0,0115$$

**6.2.4.1.3 Profils des vitesses et des températures en cours d'établissement**

■ **Plaques parallèles isothermes**

$$T_{p_1} = T_{p_2} = T_p = Cte$$

$$Nu_m = \frac{\bar{h} D_h}{\lambda} = 7,55 + \frac{0,024(x^*)^{-1,14}}{1 + 0,0358(x^*)^{-0,64} Pr^{0,17}}$$

d'après Stephan [43].

■ **Plaques parallèles à flux surfacique constant**

Pour  $\varphi_{p_1} = \varphi_{p_2} = \varphi_p = Cte$ , les valeurs du nombre de Nusselt local sont données par le tableau 13.

■ **Longueur d'établissement thermique**

$L_{th}^*$	$Pr$
0,030	0,01
0,017	0,7
0,014	1
0,012	10
0,011 5	$\infty$

avec  $L_{th}^* = \frac{L_{th}}{D_h \cdot Pe_{D_h}}$  longueur d'établissement thermique sans dimension.

**6.2.4.2 Écoulement turbulent**

■  $Pr \geq 0,5$  avec  $\varphi_p$  ou  $T_p$  constant sur les 2 plaques

$$\overline{Nu}_{D_h} = 0,023 Re_{D_h}^{0,8} Pr^{1/3}$$

■  $Pr < 0,02$  avec  $\varphi_p$  constant sur une plaque, l'autre étant isolée

$$\overline{Nu}_{D_h} = 5,8 + 0,02 Pe_{D_h}^{0,8}$$

d'après Seban [18].

**Tableau 13 – Valeurs du nombre de Nusselt local pour des plaques parallèles à flux surfacique constant avec profils des vitesses et des températures en cours d'établissement (d'après Hwang et Fan [44])**

$Pr = 10^{-2}$		$Pr = 0,7$		$Pr = 10$	
$x^*$	$Nu_{D_h}(x)$	$x^*$	$Nu_{D_h}(x)$	$x^*$	$Nu_{D_h}(x)$
$1 \times 10^{-3}$	24,5	$7,14 \times 10^{-4}$	21,98	$5 \times 10^{-5}$	50,74
$2 \times 10^{-3}$	18,5	$1,79 \times 10^{-3}$	15,11	$1,25 \times 10^{-4}$	34,07
$4 \times 10^{-3}$	13,7	$6,25 \times 10^{-3}$	10,03	$4,38 \times 10^{-4}$	20,66
$7 \times 10^{-3}$	11,1	$1,07 \times 10^{-2}$	8,90	$7,5 \times 10^{-4}$	17,03
$1 \times 10^{-2}$	10,0	$2,86 \times 10^{-2}$	8,24	$2 \times 10^{-3}$	12,6
$2 \times 10^{-2}$	9,0	$8,93 \times 10^{-2}$	8,22	$6,25 \times 10^{-3}$	9,50
$4 \times 10^{-2}$	8,5	0,143	8,22	$1 \times 10^{-2}$	8,80
$7 \times 10^{-2}$	8,3	.....	.....	.....	.....
$2 \times 10^{-1}$	8,23	.....	.....	.....	.....

### 6.3 Convection naturelle externe

#### 6.3.1 Plaque plane verticale (figure 13)

##### 6.3.1.1 Plaque isotherme ( $T_p = Cte$ )

Les propriétés physiques du fluide sont évaluées à  $T_f = \frac{T_p + T_\infty}{2}$  :

$$Ra_x = \frac{g \beta \Delta T x^3}{\alpha \nu}$$

avec  $\Delta T = |T_p - T_\infty|$ ,

$\beta$  coefficient de dilatation thermique.

##### ■ Régime laminaire

$$Nu_x = \frac{h(x) x}{\lambda} = 0,39 Ra_x^{1/4}$$

– si  $10^4 < Ra_L < 10^9$  :

$$\overline{Nu}_L = 0,59 Ra_L^{1/4} \text{ (d'après Mc Adams [5])}$$

##### ■ Régime turbulent

– si  $Ra_L > 10^9$  :

$$Nu_x = 0,12 Ra_x^{1/3}$$

– si  $10^9 < Ra_L < 10^{12}$  :

$$\overline{Nu}_L = 0,13 Ra_L^{1/3} \text{ (d'après Mc Adams [5])}$$

##### 6.3.1.2 Plaque à flux surfacique constant ( $\varphi_p = Cte$ )

$$Ra_x^* = \frac{g \beta \varphi_p x^4}{\lambda \alpha \nu}$$

##### ■ Régime laminaire

$$\overline{Nu}_L = \frac{0,670 Ra_L^{*1/4}}{\left[1 + \left(\frac{0,437}{Pr}\right)^{9/16}\right]^{4/9}}$$

d'après Churchill et Ozoé [27].

##### ■ Régime turbulent

– si  $10^9 < Ra_L^* < 10^{12}$  :

$$\overline{Nu}_L = 0,13 Ra_L^{*1/3} \text{ (d'après Mc Adams [5])}$$

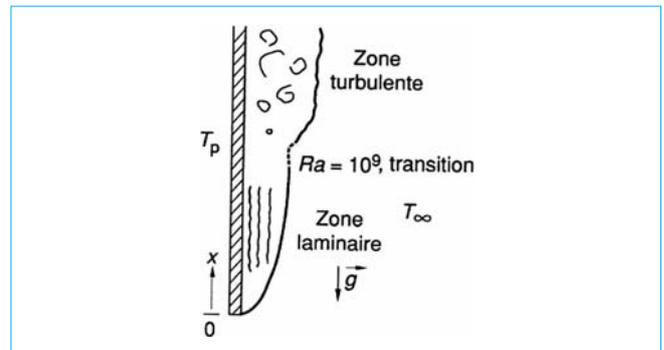


Figure 13 – Plaque plane verticale

ou pour l'eau :

– si  $10^{13} < Ra_x^* < 10^{16}$

$$Nu_x = 0,568 Ra_x^{*0,22}$$

#### 6.3.2 Plaque inclinée

(D'après Chen *et al.* [47]).

Soit  $\alpha$  l'angle d'inclinaison par rapport à l'horizontale.

##### 6.3.2.1 Plaque inclinée isotherme ( $T_p = Cte$ )

##### ■ Régime laminaire

●  $0^\circ \leq \alpha < 15^\circ$

– si  $10^3 \leq Ra_x \leq 10^9$  :

$$Nu_x = K_2(Pr) \left(\frac{Ra_x}{5}\right)^{\frac{1}{5} + C(\alpha)}$$

– si  $10^3 \leq Ra_L \leq 10^9$  :

$$\overline{Nu}_L = \frac{K_2(Pr)}{3 \left[\frac{1}{5} + C(\alpha)\right]} \left(\frac{Ra_L}{5}\right)^{\frac{1}{5} + C(\alpha)}$$

avec  $K_2(Pr) = \frac{\sqrt{Pr}}{0,25 + 1,6\sqrt{Pr}}$ ,  $C(\alpha) = 0,070\sqrt{\sin \alpha}$

- $15^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$

– si  $5 \times 10^3 \leq Ra_x \sin \alpha \leq 5 \times 10^9$  :

$$Nu_x = K_1(Pr) (Ra_x \sin \alpha)^{1/4}$$

– si  $5 \times 10^3 \leq Ra_L \sin \alpha \leq 5 \times 10^9$  :

$$\overline{Nu}_L = \frac{4}{3} K_1(Pr) (Ra_L \sin \alpha)^{1/4}$$

avec  $K_1(Pr) = \frac{3}{4} \left[ \frac{2 Pr}{5 + 10 \sqrt{Pr} + 10 Pr} \right]^{1/4}$

**Régime turbulent**

On utilise les mêmes formules que pour la plaque plane verticale (§ 6.3.1) en remplaçant  $Ra_x$  par  $Ra_x \sin \alpha$ .

**6.3.2.2 Plaque inclinée à flux surfacique constant ( $\varphi_p = Cte$ )**

**Régime laminaire**

- $0^\circ \leq \alpha < 15^\circ$  :

– si  $10^4 \leq Ra_x^* \leq 10^{10}$  :

$$Nu_x = K_4(Pr) \left( \frac{Ra_x^*}{6} \right)^{\frac{1}{6} + D(\alpha)}$$

– si  $10^4 \leq Ra_L^* \leq 10^{10}$  :

$$\overline{Nu}_L = \frac{K_4(Pr)}{4 \left[ \frac{1}{6} + D(\alpha) \right]} \left( \frac{Ra_L^*}{6} \right)^{\frac{1}{6} + D(\alpha)}$$

avec  $K_4(Pr) = \frac{\sqrt{Pr}}{0,12 + 1,2 \sqrt{Pr}}$ ,  $D(\alpha) = 0,038 \sqrt{\sin \alpha}$

- $15^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$  :

– si  $5 \times 10^4 \leq Ra_x^* \sin \alpha \leq 5 \times 10^{10}$  :

$$Nu_x = K_3(Pr) (Ra_x^* \sin \alpha)^{1/5}$$

– si  $5 \times 10^4 \leq Ra_L^* \sin \alpha \leq 5 \times 10^{10}$  :

$$\overline{Nu}_L = \frac{5}{4} K_3(Pr) (Ra_L^* \sin \alpha)^{1/5}$$

avec  $K_3(Pr) = \left[ \frac{Pr}{4 + 9 \sqrt{Pr} + 10 Pr} \right]^{1/5}$

**6.3.3 Plaque horizontale (figure 14)**

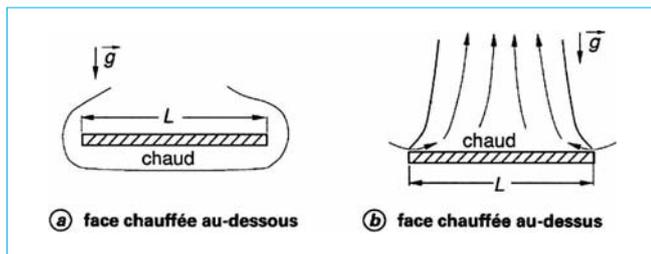


Figure 14 – Plaque horizontale

**Face chauffée au-dessous**

D’après Mc Adams [5] :

– si  $3 \times 10^5 \leq Ra_L \leq 3 \times 10^{10}$  :

$$\overline{Nu}_L = 0,27 Ra_L^{1/4}$$

D’après Fujii et Imura [27] :

– si  $10^6 \leq Ra_L \leq 10^{11}$  :

$$\overline{Nu}_L = 0,58 Ra_L^{1/5}$$

**Face chauffée au-dessus**

• Régime laminaire :

– si  $10^5 < Ra_L < 10^7$  :

$$\overline{Nu}_L = 0,54 Ra_L^{1/4}$$

• Régime turbulent (Fischenden et Saunders [27]) :

– si  $10^7 < Ra_L < 3 \times 10^{10}$  :

$$\overline{Nu}_L = 0,14 Ra_L^{1/3}$$

**6.3.4 Angles**

(D’après Ruiz et Sparrow [48].)

La température de paroi est constante et les propriétés physiques du fluide sont prises à la température du film :

$$T_f = \frac{T_p + T_\infty}{2}$$

**Angle droit à 45° par rapport à l’horizontale (figure 15a) :**

• si  $2 \times 10^6 \leq Ra_L \leq 5,6 \times 10^7$  :

$$\overline{Nu}_L = 0,398 Ra_L^{0,271} = 0,570 Ra_L^{1/4}$$

• si  $5,6 \times 10^7 \leq Ra_L \leq 1,6 \times 10^9$  :

$$\overline{Nu}_L = 0,116 Ra_L^{0,340} = 0,132 Ra_L^{1/3}$$

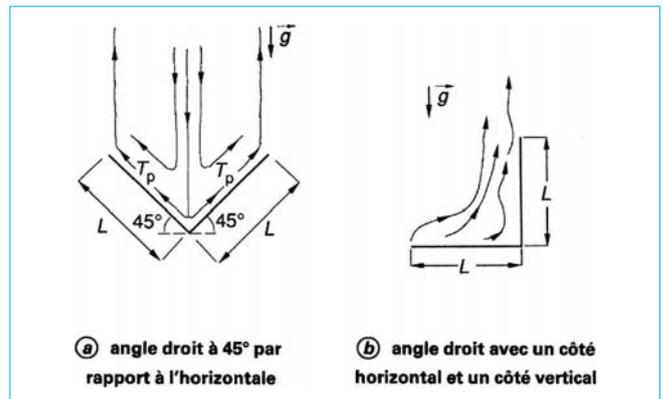


Figure 15 – Convection naturelle dans les angles

**Angle droit avec un côté horizontal et un côté vertical** (figure 15b) :

- si  $3 \times 10^6 \leq Ra_L \leq 5 \times 10^8$  :
  - pour plaque horizontale :

$$\begin{aligned} \overline{Nu}_L &= 0,131 Ra_L^{0,349} \\ &= 0,172 Ra_L^{1/3} \end{aligned}$$

- pour plaque verticale :

$$\begin{aligned} \overline{Nu}_L &= 0,347 Ra_L^{0,280} \\ &= 0,588 Ra_L^{1/4} \end{aligned}$$

Corrélation moyenne pour les 2 plaques :

$$\begin{aligned} \overline{Nu}_L &= 0,201 Ra_L^{0,318} \\ &= 0,154 Ra_L^{1/3} \end{aligned}$$

**6.3.5 Cylindre horizontal**

$30 \mu m < D < 10 \text{ cm}$

**Cylindre horizontal isotherme :**

$$0,5 < Pr < 10^3$$

- si  $10^4 < Ra_D < 10^9$  :

$$\overline{Nu}_D = 0,53 Ra_D^{1/4} \quad \text{d'après Mc Adams [5]}$$

- si  $10^9 < Ra_D < 10^{12}$  :

$$\overline{Nu}_D = 0,13 Ra_D^{1/3}$$

( $T_p - T_\infty$  varie de quelques degrés à 1 500 °C).

D'après Morgan [27] :

$$\overline{Nu}_D = A Ra_D^n$$

avec A et n coefficients donnés par le tableau ci-après :

A	n	$Ra_D$
0,675	0,058	$10^{-10}$ à $10^{-2}$
1,020	0,148	$10^{-2}$ à $10^2$
0,850	0,188	$10^2$ à $10^4$
0,480	0,250	$10^4$ à $10^7$
0,125	0,333	$10^7$ à $10^{12}$

**Cylindre horizontal à flux surfacique constant :**

on peut remplacer :

$$Ra_D \text{ par } Ra_D^* = \frac{g \beta \varphi_p D^4}{\lambda a \nu}$$

dans les formules précédentes (§ 6.3.5).

**6.3.6 Cylindre vertical**

**Cylindre vertical isotherme :**

- si  $D/L \geq 35 Gr_L^{-1/4}$

on utilise les formules de la plaque plane verticale (§ 6.3.1) ;

- si  $D/L < 35 Gr_L^{-1/4}$  :

$$\overline{Nu}_D \exp\left(\frac{-2}{\overline{Nu}_D}\right) = 0,6 \left(\frac{D}{L}\right)^{1/4} Ra_L^{1/4} \quad (\text{d'après Elenbaas [27]})$$

avec L longueur du cylindre.

**Cylindre vertical à flux surfacique constant (figure 16).**

**6.3.7 Sphère isotherme**

D'après Yagamata [27], pour l'air :

- si  $1 < Ra_D < 10^5$  :

$$\overline{Nu}_D = 2 + 0,43 Ra_D^{1/4}$$

D'après Raithby et Hollands [28] :

- si  $Ra_D > 1$  et quel que soit Pr :

$$\overline{Nu}_D = 2 + 0,56 \left[ \frac{Ra_D \cdot Pr}{0,846 + Pr} \right]^{1/4}$$

**6.4 Convection naturelle interne**

**6.4.1 Plans parallèles isothermes horizontaux. Cellule rectangulaire horizontale**

Le flux thermique surfacique échangé entre les deux faces thermiquement actives est donné par :

$$\varphi_p = \lambda_e \frac{T_c - T_f}{\delta}$$

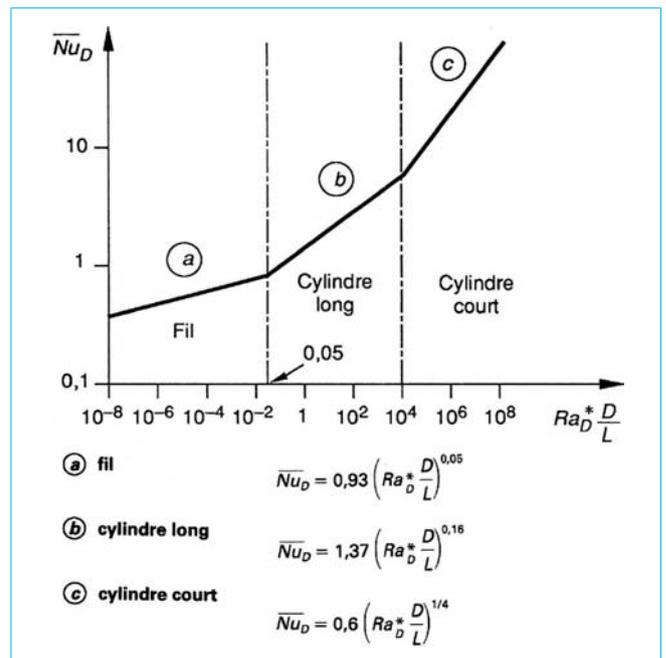


Figure 16 – Cylindre vertical à flux surfacique constant

**6.4.1.1 Plans ou cellule chauffés par le haut** (figure 17a)

Un chauffage par le haut entraîne une stratification :

$$Nu_{\delta} = \frac{\lambda_e}{\lambda} = 1$$

**6.4.1.2 Plans ou cellule chauffés par le bas** (figure 17b)

Les propriétés physiques pour les gaz et les liquides sont évaluées à la température moyenne  $\frac{T_c + T_f}{2}$ .

■ **Gaz :**

$$0,5 \leq Pr \leq 2 \quad Ra_{\delta} = \frac{g \beta (T_c - T_f) \delta^3}{a \nu}$$

– si  $Ra_{\delta} \leq 1708$  :

$$\frac{\lambda_e}{\lambda} = 1$$

avec  $\lambda_e$  conductivité thermique équivalente ;

– si  $1708 < Ra_{\delta} < 7000$  :

$$\frac{\lambda_e}{\lambda} = 0,059 Ra_{\delta}^{0,4}$$

– si  $7000 < Ra_{\delta} < 3,2 \times 10^5$  :

$$\frac{\lambda_e}{\lambda} = 0,212 Ra_{\delta}^{1/4}$$

– si  $Ra_{\delta} > 3,2 \times 10^5$  :

$$\frac{\lambda_e}{\lambda} = 0,061 Ra_{\delta}^{1/3}$$

■ **Liquides :**

– si  $1708 < Ra_{\delta} < 6000$ ,  $1 \leq Pr \leq 5000$  :

$$\frac{\lambda_e}{\lambda} = 0,012 Ra_{\delta}^{0,6}$$

– si  $6000 < Ra_{\delta} < 37000$ ,  $1 \leq Pr \leq 5000$  :

$$\frac{\lambda_e}{\lambda} = 0,375 Ra_{\delta}^{0,2}$$

– si  $3,7 \times 10^4 < Ra_{\delta} < 10^8$ ,  $1 \leq Pr \leq 20$  :

$$\frac{\lambda_e}{\lambda} = 0,13 Ra_{\delta}^{0,3}$$

– si  $Ra_{\delta} > 10^8$ ,  $1 \leq Pr \leq 20$  :

$$\frac{\lambda_e}{\lambda} = 0,057 Ra_{\delta}^{1/3}$$

**6.4.2 Cellule rectangulaire verticale** (figure 18)

Pour un allongement  $A\ell$  quelconque, la limite entre la pseudo-conduction et la convection naturelle développée est, d'après Batehelor [27] donnée par la relation :

$$Ra_{\delta} = 500 A\ell$$

Les propriétés physiques du fluide sont évaluées à la température moyenne  $\frac{T_c + T_f}{2}$ .

Il existe de nombreuses formules qui ne donnent pas toujours des valeurs concordantes.

On peut néanmoins citer :

■ **Gaz** (Mull et Reiher [27]) :

$$0,5 < Pr < 2 \quad \text{et} \quad 3 < A\ell < 42$$

– si  $Ra_{\delta} < 2 \times 10^3$  :

$$\frac{\lambda_e}{\lambda} = 1$$

– si  $6 \times 10^3 < Ra_{\delta} < 2 \times 10^5$  :

$$\frac{\lambda_e}{\lambda} = 0,197 Ra_{\delta}^{1/4} A\ell^{-1/9}$$

– si  $2 \times 10^5 < Ra_{\delta} < 1,1 \times 10^7$  :

$$\frac{\lambda_e}{\lambda} = 0,073 Ra_{\delta}^{1/3} A\ell^{-1/9}$$

■ **Liquides** (Mc Gregor *et al.* [27]) :

– si  $1 < Pr < 20000$ ,  $10^4 < Ra_{\delta} < 10^7$ ,  $10 < A\ell < 40$  :

$$\frac{\lambda_e}{\lambda} = 0,42 Ra_{\delta}^{1/4} Pr^{0,012} A\ell^{-0,3}$$

– si  $1 < Pr < 20$ ,  $10^6 < Ra_{\delta} < 10^9$ ,  $1 < A\ell < 40$  :

$$\frac{\lambda_e}{\lambda} = 0,046 Ra_{\delta}^{1/3}$$

Ces relations valables pour  $T_p = Cte$  le sont également pour  $\varphi_p = Cte$  en remplaçant  $Ra_{\delta}$  par  $Ra_{\delta}^*$ .

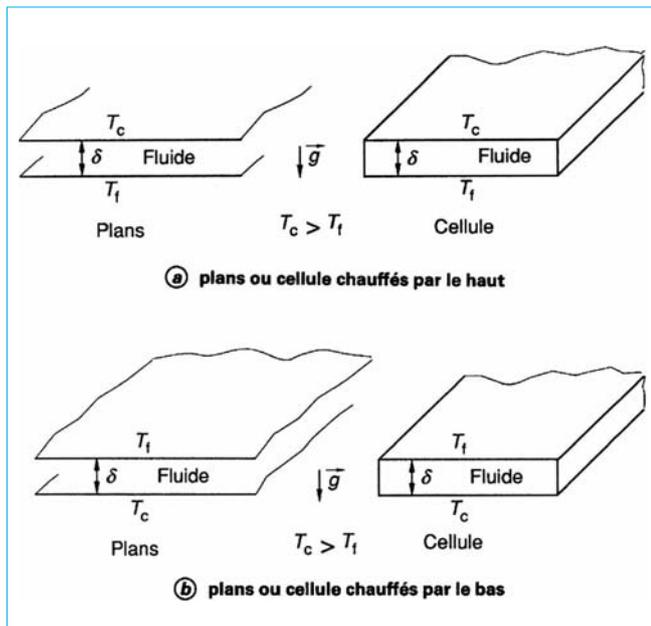


Figure 17 – Plans parallèles isothermes horizontaux. Cellule rectangulaire horizontale

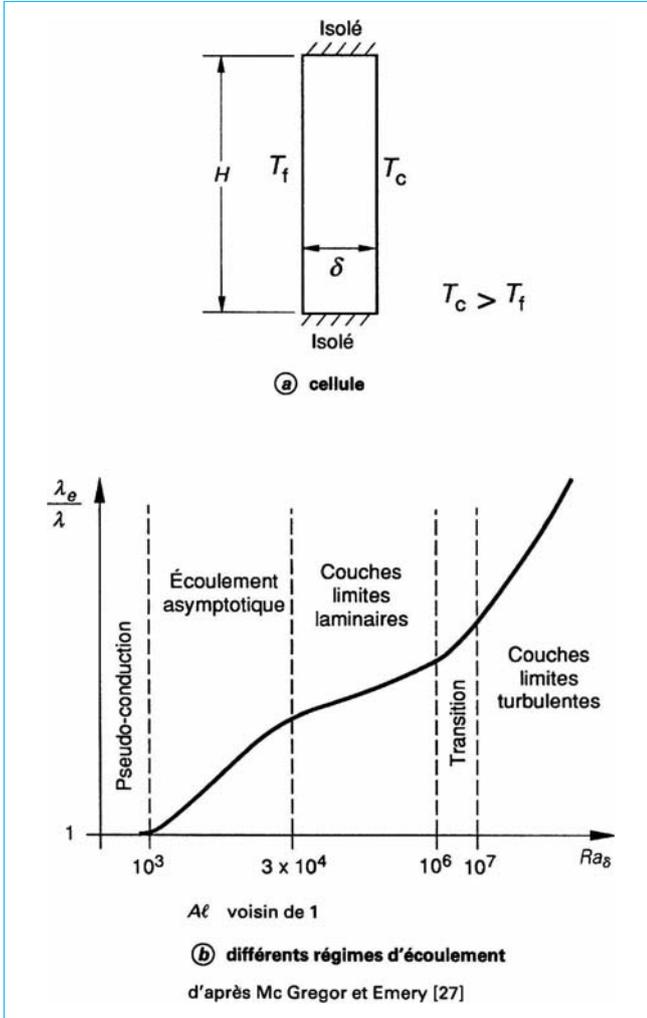


Figure 18 – Cellule rectangulaire verticale

**6.4.3 Cellule rectangulaire inclinée (figure 19)**

Les propriétés physiques du fluide sont évaluées à la température moyenne  $\frac{T_c + T_f}{2}$ .

■  $0 < \alpha < \alpha^*$  ( $\alpha^*$  angle pour lequel  $\frac{\lambda_e}{\lambda}$  est minimal) :

– si  $A\ell > 10$  (Hollands *et al.* [27]) :

$$Nu = \frac{\lambda_e}{\lambda} = 1 + 1,44 \left[ 1 - \frac{1708}{Ra_\delta \cos \alpha} \right]^* \left[ 1 - \frac{(\sin 1,8 \alpha)^{1,6} 1708}{Ra_\delta \cos \alpha} \right] + \left[ \left( \frac{Ra_\delta \cos \alpha}{5830} \right)^{1/3} - 1 \right]^*$$

avec

$$[X]^* = \frac{|X| + X}{2}$$

(La valeur X représente la valeur du contenu des crochets ayant l'astérisque en exposant).

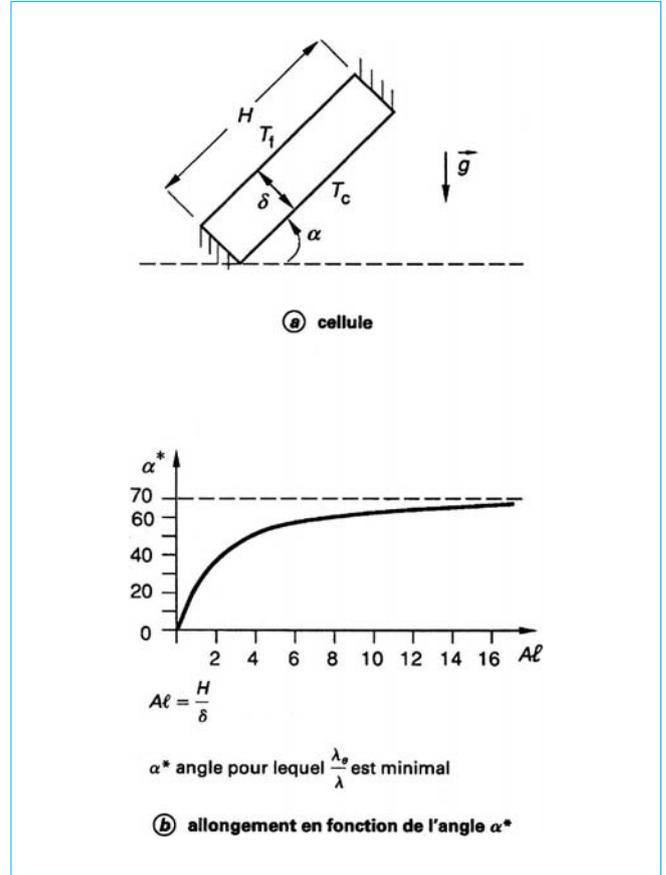


Figure 19 – Cellule rectangulaire inclinée (d'après Catton [26])

– si  $A\ell \leq 10$  :

$$Nu = \frac{\lambda_e}{\lambda} = Nu(0^\circ) \left[ \frac{Nu(90^\circ)}{Nu(0^\circ)} \right]^{\frac{\alpha}{\alpha^*}} (\sin \alpha^*)^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{\alpha}{\alpha^*}$$

avec  $Nu(0^\circ)$  et  $Nu(90^\circ)$  valeurs du nombre de Nusselt pour la cellule horizontale ( $\alpha = 0^\circ$ ) et la cellule verticale ( $\alpha = 90^\circ$ ).

■  $\alpha^* < \alpha < 90^\circ$  quel que soit  $A\ell$  (Ayyasnamy et Catton [27]) :

$$Nu(\alpha) = \frac{\lambda_e}{\lambda} = Nu(90^\circ) (\sin \alpha)^{1/4}$$

■  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$  quel que soit  $A\ell$  (Arnold *et al.* [27]) :

$$Nu(\alpha) = 1 + [Nu(90^\circ) - 1] \sin \alpha$$

**6.4.4 Plans verticaux parallèles**

$$Ra_\delta = \frac{g \beta \delta^3 (T_p - T_\infty)}{a \nu}$$

$$Ra_\delta^+ = Ra_\delta \frac{\delta}{H}$$

Les propriétés physiques de l'air sont évaluées à  $T_p$ .

**■ Deux plaques isothermes à la même température (figure 20a)**

D'après Elenbaas [27] :

$$\overline{Nu}_\delta = \frac{\overline{h} \delta}{\lambda} = \frac{Ra_\delta^+}{24} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{35}{Ra_\delta^+}\right)^{3/4} \right]$$

– si  $Ra_\delta^+$  faible (< 10) :

$$\overline{Nu}_\delta = \frac{Ra_\delta^+}{24}$$

– si  $Ra_\delta^+$  grand (> 300) :

$$\overline{Nu}_\delta = \frac{35^{3/4}}{24} Ra_\delta^{+1/4}$$

$$\overline{Nu}_\delta = 0,60 Ra_\delta^{+1/4}$$

● **Autre expression** (Churchill et Usagi [27]) :

$$\overline{Nu}_\delta = \left[ \frac{576}{Ra_\delta^{+2}} + \frac{2,873}{\sqrt{Ra_\delta^+}} \right]^{-1/2}$$

quel que soit  $Ra_\delta^+$ .

● **Épaisseur optimale** ( $\delta_{opt}$ )

Elle correspond au transfert thermique maximal entre les plans et l'air intérieur :

$$Ra_{\delta_{opt}}^+ = (2,714)^4 = \frac{g \beta (T_p - T_\infty) \delta_{opt}^4}{a \nu H}$$

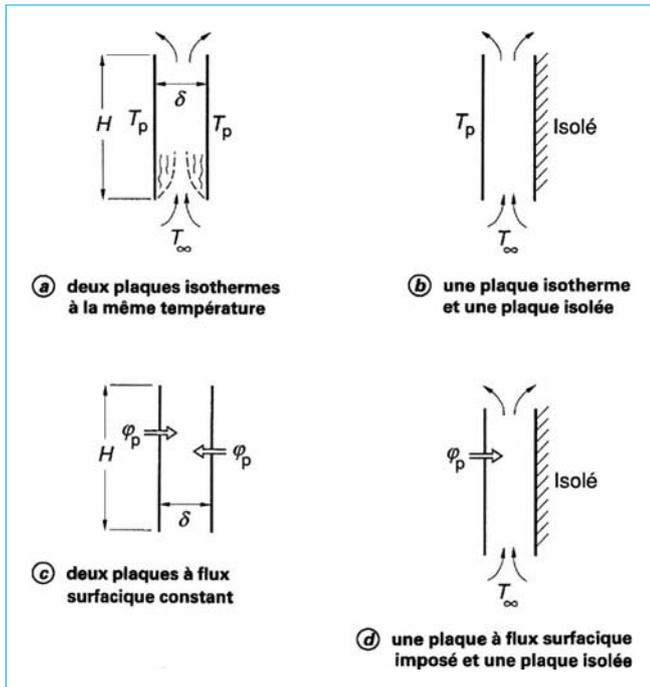


Figure 20 – Plans verticaux parallèles

**■ Une plaque isotherme et une plaque isolée (figure 20b)**

Les propriétés physiques de l'air sont évaluées à  $T_p$ .

D'après Churchill et Usagi [27] :

$$\overline{Nu}_\delta = \left[ \frac{144}{Ra_\delta^{+2}} + \frac{2,873}{\sqrt{Ra_\delta^+}} \right]^{-1/2}$$

quel que soit  $Ra_\delta^+$ .

● **Épaisseur optimale**

Elle correspond à :

$$Ra_{\delta_{opt}}^+ = (2,154)^4$$

**■ Deux plaques à flux surfacique constant (figure 20c)**

Les propriétés physiques de l'air sont évaluées à  $T_\infty$  :

$$Ra_\delta^* = \frac{g \beta \delta^4 \varphi_p}{a \nu \lambda}$$

$$Ra_\delta^{++} = Ra_\delta^* \frac{\delta}{H}$$

D'après Churchill et Usagi [27] :

$$\overline{Nu}_\delta = \frac{\overline{h} \delta}{\lambda} = \left[ \frac{12}{Ra_\delta^{++}} + \frac{1,88}{(Ra_\delta^{++})^{2/5}} \right]^{-1/2}$$

quel que soit  $Ra_\delta^{++}$ .

● **Épaisseur optimale**

Elle correspond à :

$$Ra_{\delta_{opt}}^{++} = (1,472)^5$$

**■ Une plaque à flux surfacique imposé et une plaque isolée (figure 20d)**

D'après Churchill et Usagi [27] :

$$\overline{Nu}_\delta = \left[ \frac{6}{Ra_\delta^{++}} + \frac{1,88}{(Ra_\delta^{++})^{2/5}} \right]^{-1/2}$$

● **Épaisseur optimale**

Elle correspond à :

$$Ra_{\delta_{opt}}^{++} = (1,169)^5$$

**6.4.5 Conduites ouvertes verticales (figure 21)**

$$Ra = \frac{g \beta (T_p - T_\infty) r_h^3}{a \nu}$$

avec  $r_h = \frac{d_h}{2}$  rayon hydraulique de la section droite.

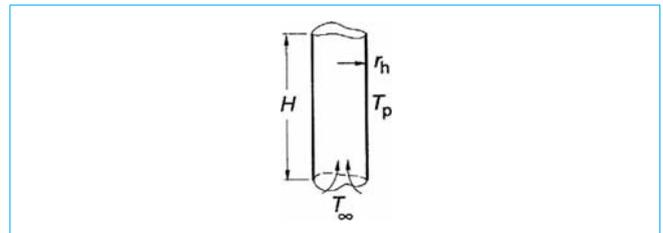


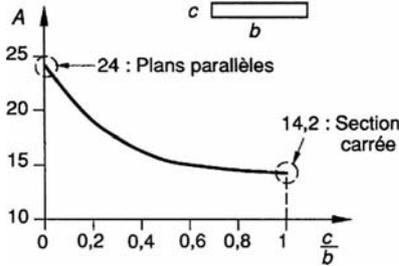
Figure 21 – Conduites ouvertes verticales

Si  $Ra^* = Ra \frac{r_h}{H}$ , d'après Elenbaas [27] :

$$\overline{Nu} = \frac{\bar{h} r_h}{\lambda} = \frac{Ra^*}{A} \left[ 1 - \exp\left(-A \left(\frac{1}{2Ra^*}\right)^{3/4}\right) \right]$$

- avec  $A = 16$  section circulaire,
- $A = 14,2$  section carrée,
- $A = 13^{1/3}$  section triangle équilatéral.

Pour une section rectangulaire,  $A$  est donné par la courbe ci-après :



### 6.4.6 Couche annulaire concentrique

#### 6.4.6.1 Couche annulaire concentrique horizontale (figure 22a)

Le flux thermique linéique échangé entre deux cylindres est :

$$\varphi = \frac{2 \pi \lambda_e}{\ln \frac{d_e}{d_i}} |T_e - T_i|$$

D'après Raithby et Hollands [28] :

$$Ra_\delta = \frac{g \beta \delta^3 |T_e - T_i|}{a \nu}$$

$$Ra_\delta^+ = \frac{\left(\ln \frac{d_e}{d_i}\right)^4}{\delta^3 [d_e^{-3/5} + d_i^{-3/5}]} \cdot Ra_\delta$$

avec  $\delta = \frac{d_e - d_i}{2}$ .

Pour un fluide classique :

– si  $Ra_\delta^+ < 10^2$  :

$$\frac{\lambda_e}{\lambda} = 1$$

– si  $10^2 < Ra_\delta^+ < 10^7$  :

$$\frac{\lambda_e}{\lambda} = \frac{0,386 Pr^{1/4}}{[0,861 + Pr]^{1/4}} \cdot Ra_\delta^{+1/4}$$

#### 6.4.6.2 Couche annulaire concentrique verticale (figure 22b)

$$Ra_\delta = \frac{g \beta \delta^3 |T_e - T_i|}{a \nu}$$

avec

$$\delta = \frac{d_e - d_i}{2}$$

si

$$H^+ = \frac{H}{\delta} \text{ et } K = \frac{d_e}{d_i}$$

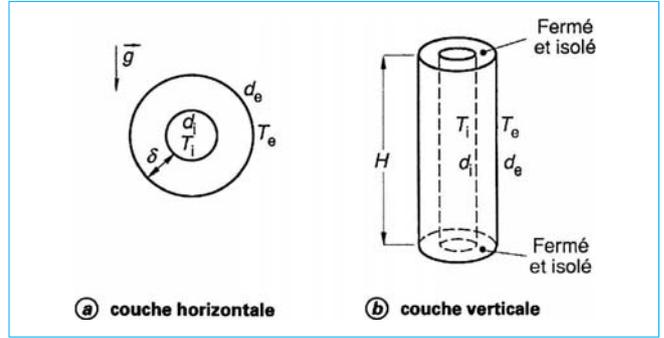


Figure 22 – Couche annulaire concentrique

D'après de Vahl Davis et Thomas [27] :

– régime conductif :

$$\frac{Ra_\delta}{H^+} \leq 400 \quad (H^+ > 5, Pr = 1)$$

$$\frac{Ra_\delta}{H^+} \leq 10^3 \quad (H^+ = 1)$$

$$\overline{Nu}_\delta = \frac{\bar{h} \delta}{\lambda} = 0,595 \frac{Ra_\delta^{0,101} \cdot K^{0,505} \cdot Pr^{0,024}}{H^{+0,052}}$$

– régime de transition :

$$\overline{Nu}_\delta = 0,202 \frac{Ra_\delta^{0,294} \cdot K^{0,423} \cdot Pr^{0,097}}{H^{+0,264}}$$

– régime de couches limites :

$$\frac{Ra_\delta}{H^+} \geq 3 \times 10^3 \quad (H^+ \leq 5, Pr = 1)$$

$$\frac{Ra_\delta}{H^+} \geq 8 \times 10^3 \quad (H^+ = 1)$$

$$\overline{Nu}_\delta = 0,286 \frac{Ra_\delta^{0,258} \cdot K^{0,442} \cdot Pr^{0,006}}{H^{+0,238}}$$

Ces expressions sont valables pour :

$$1 \leq K \leq 10, \quad 1 \leq H^+ \leq 33,$$

$$0,5 \leq Pr \leq 10^4 \text{ et } Ra_\delta \leq 2 \times 10^5$$

et les propriétés physiques du fluide sont évaluées à  $\frac{T_e + T_i}{2}$ .

### 6.4.7 Couche sphérique concentrique (figure 23)

$$Ra_\delta = \frac{g \beta \delta^3 |T_e - T_i|}{a \nu}$$

Le flux thermique échangé entre les deux sphères est :

$$\Phi = \frac{2 \pi \lambda_e |T_e - T_i|}{\frac{1}{d_i} - \frac{1}{d_e}}$$

Les propriétés physiques du fluide sont évaluées à  $\frac{T_e + T_i}{2}$ .

Si  $0,7 \leq Pr \leq 4150$ ,  $0,09 \leq \frac{2\delta}{d_i} \leq 1,81$   
 et  $1,2 \times 10^2 \leq Ra_\delta \frac{2\delta}{d_i} \leq 1,1 \times 10^9$  :

– d’après Scanlan *et al.* [27] :

$$\frac{\lambda_e}{\lambda} = 0,202 Ra_\delta^{0,228} \left(\frac{2\delta}{d_i}\right)^{0,252} \cdot Pr^{0,029}$$

– d’après Raithby et Hollands [28] :

$$\frac{\lambda_e}{\lambda} = \frac{0,74}{d_e d_i} \frac{Pr^{1/4}}{(0,861 + Pr)^{1/4}} \frac{Ra_\delta^{1/4}}{[d_i^{-7/5} + d_e^{-7/5}]^{5/4}}$$

## 6.5 Convection mixte externe

### 6.5.1 Cylindre

#### 6.5.1.1 Autour d’un cylindre horizontal

##### 6.5.1.1.1 Écoulement forcé horizontal

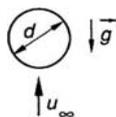


Le passage de la convection naturelle à la convection mixte et de cette dernière à la convection forcée dépend des nombres de Grashof et de Reynolds (figure 24).

Les expressions donnant explicitement les variations de  $Nu$  en fonction de  $Gr$  et  $Re$  sont pratiquement inexistantes, on peut néanmoins citer les courbes (figure 25) obtenues par Sharma et Sukhatme [49].

##### 6.5.1.1.2 Écoulement forcé vertical

Nota : le lecteur pourra se reporter à la référence bibliographique [50].



Pour l’air :

$$10^2 \leq Re_d \leq 3 \times 10^3$$

$$2,5 \times 10^4 \leq Gr_d \leq 3 \times 10^5$$

$$19 \text{ mm} \leq d \leq 38 \text{ mm}$$

le nombre de Richardson se définit par :

$$Ri_d = \frac{Gr_d}{Re_d^2}$$

et on obtient  $\frac{\overline{Nu}_d}{\overline{Nu}_{d,CF}} = 1 + 0,18 Ri_d - 0,011 Ri_d^2$

avec  $\overline{Nu}_{d,CF} = 0,464 Re_d^{1/2} + 4 \times 10^{-4} Re_d$

pour  $Ri_d < 0,28 \rightarrow \overline{Nu}_d \approx \overline{Nu}_{d,CF}$ .

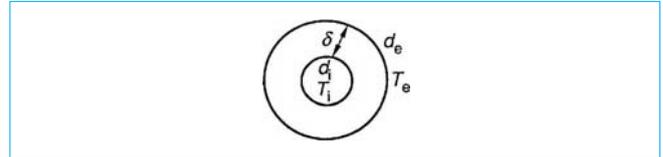


Figure 23 – Couche sphérique concentrique

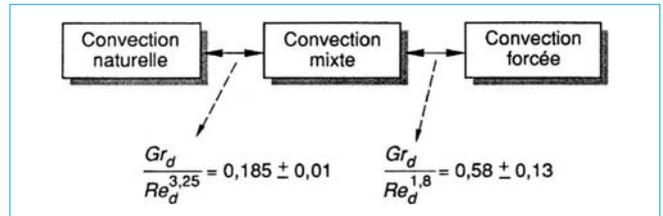
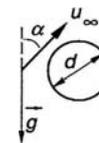


Figure 24 – Passage de la convection naturelle à la convection mixte et de la convection mixte à la convection forcée (d’après [49])

##### 6.5.1.1.3 Écoulement forcé faisant un angle $\alpha$ quelconque avec la verticale

Nota : le lecteur pourra se reporter à la référence bibliographique [51].



Pour l’air :

$$19 \text{ mm} \leq d \leq 38 \text{ mm}$$

La transition entre la convection mixte et la convection forcée est fonction de l’inclinaison  $\alpha$  de l’écoulement forcé avec la verticale :

$$\overline{Nu}_d \approx \overline{Nu}_{d,CF} \text{ à } \pm 5 \%$$

si :

$$Ri_d < 0,10 \text{ pour } \alpha = 0^\circ$$

$$Ri_d < 0,53 \text{ pour } \alpha = 90^\circ$$

$$Ri_d < 0,04 \text{ pour } \alpha = 135^\circ$$

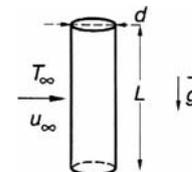
$$Ri_d < 0,01 \text{ pour } \alpha = 180^\circ$$

Les quatre courbes de la figure 26 donnent les variations du rapport du nombre de Nusselt en convection mixte au nombre de Nusselt en convection forcée en fonction du nombre de Richardson ( $Ri_d$ ) pour quatre orientations particulières de l’écoulement forcé.

##### 6.5.1.2 Autour d’un cylindre vertical

Les résultats présentés sont ceux de Young et Ozel [52]. Ils sont relatifs à un écoulement forcé horizontal laminaire et à un cylindre isotherme.

Si  $400 < Re_d < 2500$ ,  $10^6 < Gr_L < 10^7$ ,  $0,5 < \frac{L}{d} < 4,5$ ,  $\frac{T_p}{T_\infty} \approx 1,2$



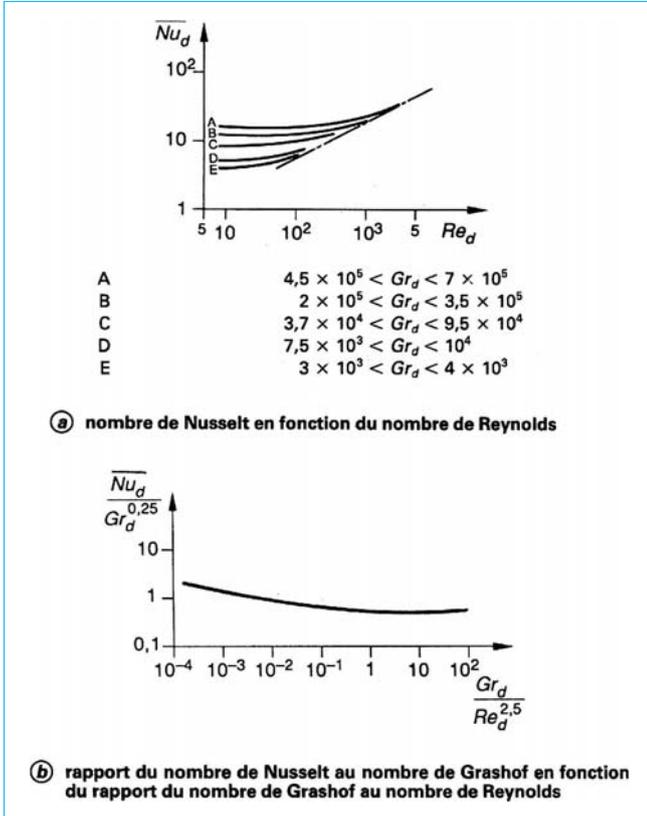


Figure 25 – Courbes obtenues par Sharma et Sukhatme [49]

$$\overline{Nu}_d = 0,67 Re_d^{1/2} \left[ \left( \frac{d}{L} \right)^4 \frac{Gr_L}{Re_d^2} \right]^{0,15}$$

Si  $\left( \frac{L}{d} \right)^4 \frac{Re_d^2}{Gr_L} < 0,1$ , la convection naturelle domine.

### 6.5.2 Plaque plane immobile

#### 6.5.2.1 Écoulement laminaire

L'écoulement forcé se fait le long de la plaque et la convection mixte est dite favorable ou défavorable suivant que les forces d'Archimède assistent ou s'opposent à l'écoulement forcé.

##### 6.5.2.1.1 Plaque isotherme

Nota : le lecteur pourra se reporter aux références bibliographiques [53] [54].

$$F_1(Pr) = 0,399 Pr^{1/3} \left[ 1 + \left( \frac{0,0468}{Pr} \right)^{2/3} \right]^{-1/4}$$

$$F_2(Pr) = \frac{3}{4} Pr^{1/2} [2,5 (1 + 2 Pr^{1/2} + 2 Pr)]^{-1/4}$$

$$F_3(Pr) = \left( \frac{Pr}{5} \right)^{1/5} Pr^{1/2} [0,25 + 1,6 Pr^{1/2}]^{-1}$$

$$F_4(Pr) = Pr^{1/2} [0,25 + 1,6 Pr^{1/2}]^{-1} \left( \frac{Pr}{5} \right)^{1/5 + C(\alpha)}$$

$$C(\alpha) = 0,070 (\cos \alpha)^{1/2}$$

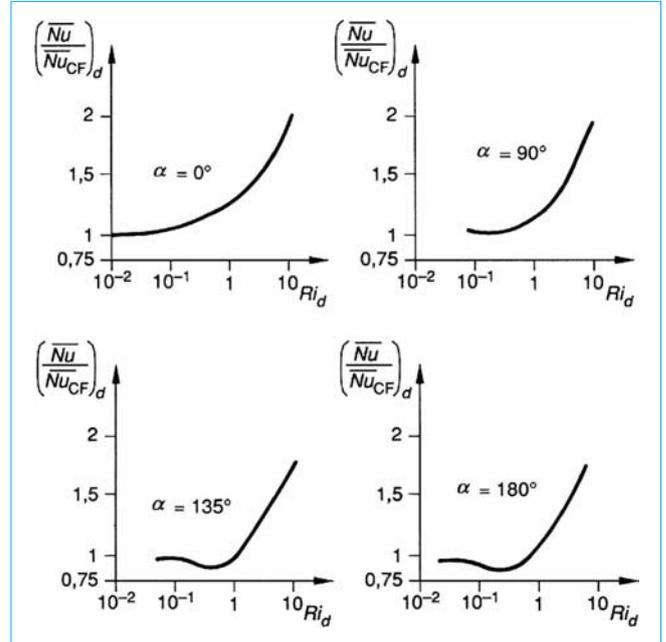


Figure 26 – Rapport du nombre de Nusselt en convection mixte au nombre de Nusselt en convection forcée en fonction du nombre de Richardson

#### ■ Plaque verticale :

$$\frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}} = F_1(Pr) \left[ 1 \pm \left( \frac{F_2(Pr) \cdot Ri_x^{1/4}}{F_1(Pr)} \right)^3 \right]^{1/3}$$

$$\frac{\overline{Nu}_L}{\sqrt{Re_L}} = 2 F_1(Pr) \left[ 1 \pm \left( \frac{2 F_2(Pr) \cdot Ri_L^{1/4}}{3 F_1(Pr)} \right)^3 \right]^{1/3}$$

avec signe + convection mixte favorable,  
signe – convection mixte défavorable.

#### ■ Plaque horizontale :

$$0,1 \leq Pr \leq 100$$

$$\frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}} = F_1(Pr) \left[ 1 \pm \left( \frac{F_3(Pr) \cdot (Gr_x / Re_x^{5/2})^{1/5}}{F_1(Pr)} \right)^3 \right]^{1/3}$$

$$\frac{\overline{Nu}_L}{\sqrt{Re_L}} = 2 F_1(Pr) \left[ 1 \pm \left( \frac{5 F_3(Pr) \cdot (Gr_L / Re_L^{5/2})^{1/5}}{6 F_1(Pr)} \right)^3 \right]^{1/3}$$

avec signe + convection mixte favorable,  
signe – convection mixte défavorable.

#### ■ Plaque inclinée

Soit  $\alpha$  l'inclinaison de la plaque par rapport à la verticale.

● Si  $0 \leq \alpha \leq 75^\circ$ , on utilise les équations de la plaque verticale en remplaçant :

$$Gr_x \text{ par } Gr_x \cos \alpha$$

$$Gr_L \text{ par } Gr_L \cos \alpha$$

- Si  $75^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ ,  $10^3 \leq Ra_x \leq 10^9$  :

$$\frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}} = F_1(Pr) \left[ 1 \pm \left( \frac{F_4(Pr) \cdot (Gr_x / Re_x^{5/2})^{1/5} Gr_x^{C(\alpha)}}{F_1(Pr)} \right)^3 \right]^{-1/3}$$

$$\frac{\overline{Nu}_L}{\sqrt{Re_L}} = 2 F_1(Pr) \left[ 1 \pm \left( \frac{F_4(Pr) \cdot (Gr_L / Re_L^{5/2})^{1/5} Gr_L^{C(\alpha)}}{6 \left[ \frac{1}{5} + C(\alpha) \right] F_1(Pr)} \right)^3 \right]^{-1/3}$$

avec signe + convection mixte favorable,  
 signe - convection mixte défavorable.

**6.5.2.1.2 Plaque à flux surfacique constant**

Nota : le lecteur pourra se reporter à la référence bibliographique [55].

$$G_1(Pr) = 0,464 Pr^{1/3} \left[ 1 + \left( \frac{0,0207}{Pr} \right)^{2/3} \right]^{-1/4}$$

$$G_2(Pr) = Pr^{2/5} (4 + 9 Pr^{1/2} + 10 Pr)^{-1/5}$$

$$G_3(Pr) = \left( \frac{Pr}{6} \right)^{1/6} Pr^{1/2} (0,12 + 1,2 Pr^{1/2})^{-1}$$

$$G_4(Pr) = Pr^{1/2} (0,12 + 1,2 Pr^{1/2})^{-1} \left( \frac{Pr}{6} \right)^{1/6 + D(\alpha)}$$

$$D(\alpha) = 0,038 (\cos \alpha)^{1/2}$$

$$Gr_x^* = \frac{g \beta \varphi_p x^4}{\lambda \nu^2}$$

■ Plaque verticale :

$$Gr_x^* = \frac{g \beta \varphi_p x^4}{\lambda \nu^2}$$

$$\frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}} = G_1(Pr) \left[ 1 \pm \left( \frac{G_2(Pr) \cdot (Gr_x^* / Re_x^{5/2})^{1/5}}{G_1(Pr)} \right)^3 \right]^{-1/3}$$

$$\frac{\overline{Nu}_L}{\sqrt{Re_L}} = 2 G_1(Pr) \left[ 1 \pm \left( \frac{5 G_2(Pr) \cdot (Gr_L^* / Re_L^{5/2})^{1/5}}{8 G_1(Pr)} \right)^3 \right]^{-1/3}$$

■ Plaque horizontale :

$$\frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}} = G_1(Pr) \left[ 1 \pm \left( \frac{G_3(Pr) \cdot (Gr_x^* / Re_x^3)^{1/6}}{G_1(Pr)} \right)^3 \right]^{-1/3}$$

$$\frac{\overline{Nu}_L}{\sqrt{Re_L}} = 2 G_1(Pr) \left[ 1 \pm \left( \frac{3 G_3(Pr) \cdot (Gr_L^* / Re_L^3)^{1/6}}{4 G_1(Pr)} \right)^3 \right]^{-1/3}$$

■ Plaque inclinée

Soit  $\alpha$  l'inclinaison de la plaque par rapport à la verticale.

- Si  $0 \leq \alpha \leq 75^\circ$ , on utilise les équations de la plaque verticale en remplaçant :

$$Gr_x^* \text{ par } Gr_x^* \cos \alpha$$

$$Gr_L^* \text{ par } Gr_L^* \cos \alpha$$

- Si  $75^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$  :

$$\frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}} = G_1(Pr) \left[ 1 \pm \left( \frac{G_4(Pr) \cdot (Gr_x^* / Re_x^3)^{1/6} \cdot Gr_x^{*D(\alpha)}}{G_1(Pr)} \right)^3 \right]^{-1/3}$$

$$\frac{\overline{Nu}_L}{\sqrt{Re_L}} = 2 G_1(Pr) \left[ 1 \pm \left( \frac{G_4(Pr) \cdot (Gr_L^* / Re_L^3)^{1/6} \cdot Gr_L^{*D(\alpha)}}{8 \left( \frac{1}{6} + D(\alpha) \right) \cdot G_1(Pr)} \right)^3 \right]^{-1/3}$$

avec signe + convection mixte favorable,  
 signe - convection mixte défavorable.

**6.5.2.2 Écoulement turbulent**

**Plaque isotherme**

Nota : le lecteur pourra se reporter à la référence bibliographique [56].

$$10^9 \leq Gr_x \leq 10^{12} \text{ quel que soit } Pr$$

$$5 \times 10^5 \leq Re_x \leq 5 \times 10^6$$

$$F(Pr) = 0,0287 Pr^{0,6} ; G(Pr) = \frac{0,150 Pr^{1/3}}{\left[ 1 + \left( \frac{0,492}{Pr} \right)^{9/16} \right]^{16/27}}$$

$$\frac{Nu_x}{Re_x^{4/5}} = F(Pr) \left[ 1 + 0,36 \left( \frac{G(Pr)}{F(Pr)} \left( \frac{Gr_x}{Re_x^{12/5}} \right)^{1/3} \right)^3 \right]^{1/3}$$

$$\frac{\overline{Nu}_L}{Re_L^{4/5}} = 1,25 F(Pr) \left[ 1 + 0,36 \left( \frac{G(Pr)}{1,25 F(Pr)} \left( \frac{Gr_L}{Re_L^{12/5}} \right)^{1/3} \right)^3 \right]^{1/3}$$

Les résultats pour des plaques planes à flux surfacique constant font défaut.

**6.5.3 Plaque plane en mouvement**

**Écoulement laminaire**

La convection mixte externe a lieu le long de la plaque plane en mouvement.

La plaque se déplace à vitesse  $U_0$ , le fluide au loin est immobile,  $\alpha$  est l'inclinaison de la plaque par rapport à la verticale.

**6.5.3.1 Plaque isotherme**

Nota : le lecteur pourra se reporter à la référence bibliographique [57].

Quel que soit  $Pr$  :

$$F_1(Pr) = \frac{0,563 \sqrt{Pr}}{\left[ 1 + 0,712 \sqrt{\frac{0,02}{Pr}} \right]^3}$$

$$F_2(Pr) = \frac{0,75 \sqrt{Pr}}{[2,5 (1 + 2 \sqrt{Pr} + 2 Pr)]^{1/4}}$$

$$\frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}} = F_1(Pr) \left[ 1 \pm \left( \frac{F_2(Pr) \cdot (Ri_x \cos \alpha)^{1/4}}{F_1(Pr)} \right)^3 \right]^{1/3}$$

$$\frac{\overline{Nu}_L}{\sqrt{Re_L}} = 2 F_1(Pr) \left[ 1 \pm \left( \frac{2 F_2(Pr) \cdot (Ri_L \cos \alpha)^{1/4}}{3 F_1(Pr)} \right)^3 \right]^{1/3}$$

**6.5.3.2 Plaque à flux surfacique constant**

Nota : le lecteur pourra se reporter à la référence bibliographique [57].

Quel que soit  $Pr$  :

$$G_1(Pr) = \frac{0,882 \sqrt{Pr}}{\left( 1 + 0,77 \sqrt{\frac{0,012}{Pr}} \right)^3}$$

$$G_2(Pr) = \left( \frac{Pr^2}{4 + 9 \sqrt{Pr} + 10 Pr} \right)^{1/5}$$

$$\frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}} = G_1(Pr) \left[ 1 \pm \left( \frac{G_2(Pr)}{G_1(Pr)} \cdot \left( \frac{Gr_x^* \cos \alpha}{Re_x^{5/2}} \right)^{1/5} \right)^3 \right]^{1/3}$$

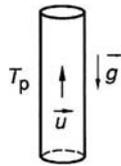
$$\frac{\overline{Nu}_L}{\sqrt{Re_L}} = 2 G_1(Pr) \left[ 1 \pm \left( \frac{5 G_2(Pr)}{8 G_1(Pr)} \left( \frac{Gr_L^* \cos \alpha}{Re_L^{5/2}} \right)^{1/5} \right)^3 \right]^{1/3}$$

avec signe + convection mixte favorable,  
 signe - convection mixte défavorable.  
 Les résultats pour des nombres de Reynolds élevés font défaut.

## 6.6 Convection mixte interne

### 6.6.1 Dans un tube vertical isotherme

Nota : le lecteur pourra se reporter à la référence bibliographique [59].



$$0,7 \leq Pr \leq 7$$

$$10^4 \leq Re_{D_h} \leq 2 \times 10^4$$

$$10^6 \leq Gr_{D_h} \leq 2 \times 10^9$$

$$\overline{Nu}_{D_h} = 0,0115 Re_{D_h}^{0,8} Pr^{1/2} \left[ 1 + \left[ 1 - \frac{696}{Re_{D_h}^{0,8}} + \frac{8300 Gr_{D_h}}{Re_{D_h}^{2,6} [1 + \sqrt{Pr}]} \right]^{0,39} \right]$$

La figure 27 définit les différents régimes de convection (naturelle, mixte et forcée) ainsi que leur transition en fonction des nombres de Reynolds et de Rayleigh.

### 6.6.2 Dans un tube horizontal

#### 6.6.2.1 Tube isotherme

Nota : le lecteur pourra se reporter à la référence bibliographique [60].

$$5 \leq Pr \leq 390 \quad 10 \leq Gz \leq 450$$

$$28 \leq \frac{L}{D} \leq 200 \quad 30 \leq Gr_D \leq 2 \times 10^6$$

$$Gz = \frac{\dot{m} c_p}{\lambda L} \quad Gr_D = \frac{g \beta (T_p - T_b) D^3}{\nu^2}$$

$$\overline{Nu}_D \left( \frac{\mu_p}{\mu_b} \right)^{0,14} = 1,75 [Gz + 0,12(Gz \sqrt{Gr_D} Pr^{0,36} Pr^{0,88})^{1/3}]$$

avec L longueur du tube,  
 T<sub>b</sub> température de mélange à l'entrée.

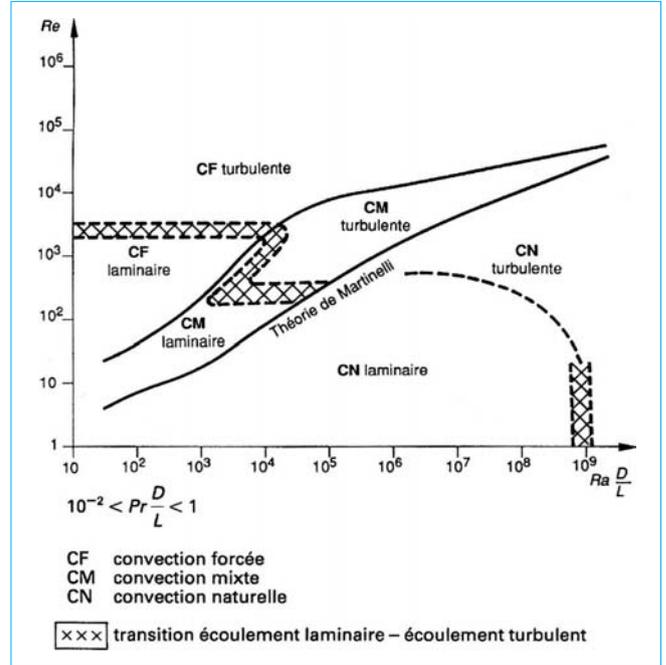
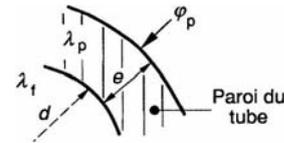


Figure 27 – Régimes de convection (d'après Métais [58])

#### 6.6.2.2 Tube à densité de flux constante

Nota : le lecteur pourra se reporter à la référence bibliographique [61].



$$4 \leq Pr \leq 175$$

$$3 \times 10^4 \leq Ra^* \leq 10^6$$

$$2 \leq W \leq 66$$

$$Gr^* = \frac{g \beta \phi_p d^4}{\nu^2 \lambda_f}$$

$$W = \frac{\lambda_f d}{\lambda_p e}$$

$$\overline{Nu}_d = \left[ (4,36)^2 + \left[ 0,145 \left( \frac{Gr^* Pr^{1,35}}{W^{0,25}} \right)^{0,265} \right]^2 \right]^{1/2}$$

La figure 28 donne les différents régimes de convection et leur transition.

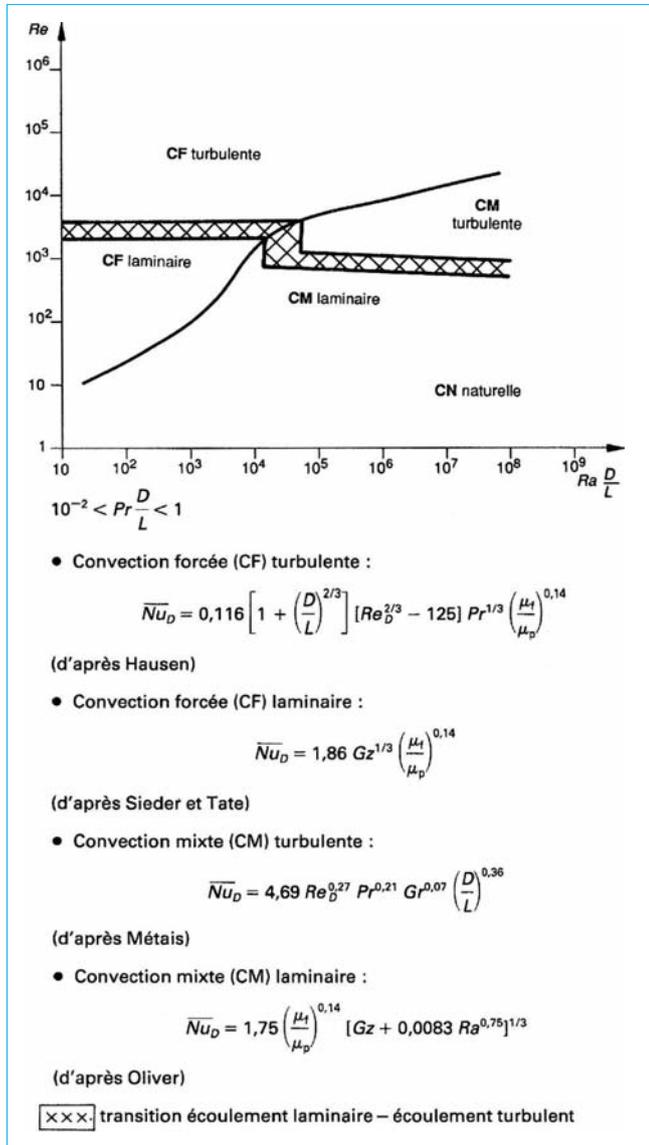


Figure 28 – Écoulement dans les tubes horizontaux. Différents régimes de convection (d'après Eckert [58])

## 7. Annexe 1 : équation de l'énergie thermique dans un milieu déformable

Suivant les auteurs, on trouvera aussi cette expression sous la forme :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = p - \nabla \varphi$$

Pour la conduction dans un corps solide indéformable, la distinction n'est que de principe :

$$c_p = c_v \quad \text{et} \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{dT}{dt}$$

En ce qui concerne la convection, le corps est **déformable et dilatable**.

Dès qu'il y a mouvement, il y a déplacement dans le champ de pesanteur, d'où énergie mécanique potentielle, vitesse, donc énergie mécanique cinétique, et travail (algébrique) contre l'atmosphère s'il y a expansion.

À cet égard, le premier membre de l'équation doit représenter les variations d'enthalpie d'où  $c_p$ . L'expression unique, qui représente la conservation de l'énergie quelles que soient ses formes, ne peut plus être limitée à la seule énergie thermique mais à l'ensemble de l'énergie mécanique et de l'énergie thermique, puisque la première apparaît spontanément aux dépens de la seconde (CN) ou est même injectée délibérément au système par le travail des pompes, ventilateurs, etc. (CF). Cette action se retrouve sous forme d'énergie mécanique, énergie dont une partie est elle-même retransformée, en CN comme en CF, en énergie thermique par le biais de la viscosité.

En toute rigueur, l'énergie thermique ne se conserve plus : seule se conserve la somme des énergies mécanique et thermique.

Tout compte fait, apparaissent dans l'équation de l'énergie thermique des termes nouveaux par rapport au processus de conduction, de telle sorte que la forme correcte doit s'écrire comme suit :

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V} \nabla T \right) = P + \mu P_\mu + \beta T \frac{dp}{dt} - \nabla \varphi$$

et, bien entendu, l'équation de continuité et l'équation de Navier-Stokes.

Mais, dans la plupart des cas, la puissance thermique dissipée par la viscosité est négligeable, tout comme l'est le terme dû à la dilatation.

## 8. Annexe 2 : adimensionnement

### 8.1 Choix du système de référence

Cette méthode originale et très puissante de résoudre les équations fondamentales en les adimensionnant à partir d'un système de référence, qui n'est pas forcément fondé directement sur les trois grandeurs longueur, masse, temps, mérite quelques commentaires.

La justification d'une telle manière de faire est d'étendre considérablement les cas d'applications afférentes à une résolution et à une vérification des équations ou du système d'équations.

Les solutions (en variables adimensionnées) sont les mêmes pour un grand nombre de cas physiquement ou mécaniquement différents. Par ailleurs, ce développement et la résolution en variables adimensionnées permettent d'établir l'allure de la corrélation entre le  $h$  convectif (par le biais du nombre de Nusselt) et les nombres caractéristiques qui interviennent seuls (avec des facteurs ou des constantes numériques) dans l'expression de cette corrélation. Dernier atout et non des moindres (une fois résolu le problème en variables adimensionnées), le retour aux variables réelles est immédiat : on mesurera l'avantage en se rappelant que ce retour aux variables réelles est parfois épineux et constitue le point délicat de méthodes comme celles de la transformation de Laplace, par exemple, utilisée en conduction.

Quoi qu'il en soit, le traitement de l'exemple du paragraphe 4.2.1 nous a fait choisir un système de référence :

longueur, vitesse, pression

qui est particulièrement indiqué dans le cas des géométries ouvertes en convection forcée (CF).

En convection naturelle (CN), les données des problèmes ne comportent jamais de valeurs données pour une vitesse quelconque qui pourrait servir de référence. Nous avons vu relation (34) comment cette valeur de référence s'imposait cependant tout naturellement pour la résolution commode du problème quitte à rechercher *a posteriori*, ce que nous ferons dans le paragraphe 8.2 de cette annexe, une signification physique à la valeur de référence adoptée :

$$V_r = \sqrt{g \beta \delta T H}$$

Mais comme nous avons le choix du système de référence, signalons qu'il y a en fait trois possibilités réellement utilisées en **convection naturelle** et qui sont regroupées dans le tableau ci-après :

	Longueur	Vitesse	Pression
<b>cas a</b>	$H$	$V_r = \sqrt{g \beta \delta T H}$ en CN $V_q$ vitesse de débit en CF	$p_r = \frac{1}{2} \rho_\infty V_r^2$
<b>cas b</b>	$H$	$V_r = \frac{v}{H}$ entraîne $Re = 1$	$p_r = \frac{1}{2} \rho_\infty V_r^2$
<b>cas c</b>	$H$	$V_r = \frac{a}{H}$ entraîne $Pe = 1$ en CF	

Le **cas a** est pratique pour les géométries ouvertes en convection naturelle et en convection forcée.

On voit que, sur le plan du principe, le choix des références aboutit toujours au même résultat : rendre identique à un facteur numérique l'un des groupements qui apparaît lors de l'adimensionnement. Prendre par exemple  $V_r = v/H$ , puisque ici  $x_1 = H$ , revient à remplacer le nombre caractéristique de la similitude mécanique qui apparaît dans la première équation (30), c'est-à-dire le nombre de Reynolds, par la valeur 1. Il n'y a aucune différence de principe avec ce que nous avons fait en convection naturelle adimensionnée pour rendre égal à 1 le terme en  $T^+$  de la première équation (33).

De même, prendre  $V_r = \frac{a}{H}$  (**cas c**) revient à rendre identique à 1 le groupement qui apparaît dans la seconde équation (30), c'est-à-dire le nombre de Péclet.

Les **cas b** et **c** sont utilisés en convection naturelle, surtout en géométrie type cellule fermée où le nombre de Nusselt est bien évidemment fonction aussi de l'allongement.

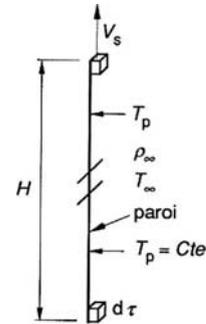
## 8.2 Signification physique de la vitesse de référence en convection naturelle

En convection naturelle (**cas a**, tableau précédent) :

$$V_r = \sqrt{g \beta \delta T H}$$

Prenons une plaque verticale à  $T_p > T_\infty$  et supposons que le petit élément de volume  $d\tau$  qui aborde le bord d'attaque prenne immédiatement la température de cette plaque ; il est soumis à une force d'Archimède élémentaire :

$$df = \rho_\infty g \beta (T_p - T_\infty) d\tau$$



Cette force travaillant sur la hauteur  $H$  produit le travail élémentaire :

$$d t = \rho_\infty g \beta \delta T H$$

avec  $\delta T = T_p - T_\infty$ .

Imaginons que, supprimant toute viscosité, ce travail a servi uniquement à donner de l'énergie cinétique à l'élément de volume ; la vitesse  $V_s$  de cet élément de volume s'obtient alors par la relation :

$$\frac{1}{2} \rho_\infty V_s^2 d\tau = \rho_\infty g \beta \delta T H d\tau$$

soit 
$$V_s = \sqrt{2} \sqrt{g \beta \delta T H}$$

Au coefficient  $\sqrt{2}$  près, on reconnaît la vitesse  $V_r$  que nous avons prise comme référence dans la géométrie ouverte en CN [équation (34)].

## 9. Annexe 3 : cas particulier de la convection

Dans ce paragraphe, on parle de la convection dans les métaux liquides ( $Pr \ll 1$ ) et, plus généralement, dans les fluides à faible nombre de Prandtl (plasmas).

Plusieurs courbes de cette annexe sont tirées de l'article de R.P. Stein *Liquid Metal Heat Transfer* paru dans *Advances in Heat Transfer*, Volume 3 (Academic Press).

### 9.1 Généralités

Le nombre de Prandtl, attaché exclusivement aux caractéristiques physiques du fluide, intervient dans tous les transferts thermiques par convection forcée ou naturelle.

L'essentiel des théories de la convection a été développé à une époque où, à part le mercure sans application industrielle et les problèmes de coulée en fonderie, on ne se préoccupait guère des transferts thermiques par les métaux liquides.

Ce qui précède a montré comment la mécanique des fluides a servi de support à toute la théorie de la convection, et même comment, à partir de l'analogie de Reynolds, on pouvait identifier les couches limites dynamique et thermique turbulentes ou trouver des coefficients d'échange en fonction des coefficients de frottement ou du nombre de Reynolds.

En écoulement laminaire et en convection forcée (CF), on est simplement ramené à un problème de conduction pure de corps mobiles ou déformables, dont la loi de déformation est connue précisément par la mécanique des fluides. Le schéma d'ensemble de la convection reste donc relativement simple et unique quel que soit le nombre de Prandtl. En turbulence, il se complique fortement pour les métaux liquides pour deux raisons fondamentales.

■ L'analogie entre les transferts de quantité de mouvement coordonnée perpendiculairement à la direction locale de l'écoulement et les transferts d'énergie thermique suivant le gradient de température n'est plus valable.

■ Dans les expressions des flux de la forme :

$$|\varphi| = \left( \frac{\lambda}{\rho c_p} + \varepsilon_T \right) \frac{dT}{dy}$$

le second terme, conséquence des échanges de matière par turbulence est rapidement prédominant quant au transfert d'énergie thermique par rapport au mécanisme de la conduction moléculaire. Si on accepte de ne pas connaître grand-chose dans le domaine des très faibles turbulences, on peut rapidement admettre des lois de la forme :

$$\tau = \varepsilon_M \frac{\partial u}{\partial y}$$

et

$$\varphi = \varepsilon_T \frac{\partial T}{\partial y}$$

Cela résout automatiquement les questions d'additivité des deux modes de diffusion de mécanisme différent, l'un moléculaire, l'autre turbulent, que cette diffusion affecte soit la quantité de mouvement soit l'énergie thermique de chaleur ; en effet, l'un des termes devient négligeable devant l'autre.

**Nota :** nous ne ferons que signaler une autre difficulté qui, celle-là, subsiste partout. Bien que l'échelle des mécanismes de transfert se soit considérablement agrandie, passant du libre parcours moyen dans un gaz ou de la distance intermoléculaire dans un liquide à la dimension des tourbillons turbulents, on pose encore, à défaut de mieux, la proportionnalité des transferts d'énergie thermique au gradient local de la variable intensive qui les détermine : c'est une hypothèse très discutable.

Sur le plan de la **mécanique des fluides**, ces conclusions subsistent ( $v \ll \varepsilon_M$ ) pour les métaux liquides qui ne se singularisent en rien par rapport à n'importe quel autre fluide. Le nombre de Reynolds caractérise toujours les lois de similitude de l'écoulement isotherme.

Mais sur le plan thermique, la **conductivité moléculaire** considérable des métaux liquides ne permet plus de négliger  $\frac{\lambda}{\rho c_p}$  devant

$\varepsilon_T$ . Certes pour des nombres de Reynolds tendant vers l'infini, le comportement asymptotique des métaux liquides se confond avec celui des fluides à nombre de Prandtl plus élevé ( $a \ll \varepsilon_T$ ). Mais, pratiquement, tout le domaine industriel est en deçà des ordres de grandeur nécessaires.

Un appel aux considérations physiques permet une compréhension au moins qualitative des particularités essentielles des métaux liquides.

La présence des électrons libres dans un métal est responsable de l'augmentation considérable du transfert thermique conductif à l'échelle moléculaire alors qu'elle n'intervient pratiquement pas dans la viscosité du métal liquide qui se trouve donc avoir un comportement très semblable aux autres liquides électriquement non conducteurs.

Comme, par ailleurs, les lois physiques régissant les électrons et leurs interactions avec le réseau sont très différentes de celles qui caractérisent le *réseau* seul, il n'y a plus aucune analogie entre le *transfert d'énergie thermique* à l'échelle microscopique assuré en grande partie par les électrons de conduction et le transfert à cette même échelle des quantités de mouvement coordonné assuré par les molécules ou les ions du liquide.

La simplification  $\varepsilon_M = \varepsilon_T n'$  n'est plus valable ici puisque l'imbrication par turbulence, en une couche donnée, d'une quantité de matière issue d'une couche beaucoup plus chaude et rapide, par exemple, est suivie de processus conductifs et visqueux (donc à l'échelle moléculaire), qui tendent à niveler les différences. À ce dernier niveau, l'absence d'analogie conduction-viscosité suffit à ruiner l'analogie du processus global.

Ces faits vont retentir sur les expressions qui donnent le nombre de Nusselt d'un écoulement de métaux liquides ou, ce qui revient au même, sur la diffusivité thermique turbulente fonction des nombres de Reynolds, de Prandtl et de la distance à la paroi.

## 9.2 Expressions du nombre de Nusselt

En fonction de ce qui vient d'être dit, les profils de vitesse calculés pour les autres fluides considérés comme isothermes sont identiquement transposables aux métaux liquides avec la même restriction : on ne tient pas compte des couplages ni de l'influence éventuelle du champ thermique sur le nombre de Reynolds ni de la dissipation d'énergie visqueuse en flux thermique qui constitue en fait une puissance  $P$  fournie au fluide. Cela est du reste plus facilement réalisé que pour  $Pr \approx 1$ , puisque les valeurs élevées de  $\lambda$  tendent à limiter les variations de  $T$  en différents points de l'écoulement, donc les variations de  $\mu$ .

Tout ce qui concerne la convection en régime laminaire (quand  $\varepsilon_T$  comme  $\varepsilon_M = 0$ ) est déjà acquis. On aura entre autres :

$$\left. \begin{aligned} Nu &= 4,36 \text{ à } \varphi_p = Cte \text{ pour un tube} \\ Nu &= 3,66 \text{ à } T_p = Cte \text{ pour un tube} \end{aligned} \right\} \text{ en régime établi}$$

En régime turbulent, la figure 29 donne, en prenant toujours l'exemple du tube circulaire, l'allure du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Péclet dans **cinq cas** :

- la courbe expérimentale pour le sodium liquide ;
- celui où on a mis en œuvre la formule de Colburn pour  $Pr = 0,01$  ;
- celui de l'air par la formule de Colburn ( $Pr = 0,2$ ) ;
- la valeur du nombre de Nusselt pour deux expressions théoriques données plus loin (§ 9.4) et adaptées, elles, aux métaux liquides. On remarque entre autres que, appliquer brutalement la formule de Colburn en y remplaçant  $Pr$  par 0,01, donne des valeurs du nombre de Nusselt très supérieures à la réalité.

On constate tout de suite l'impossibilité d'utiliser des expressions du nombre de Nusselt type Colburn qui étaient bien adaptées pour  $Pr \approx 1$  ou supérieur à 1.

Une des premières tentatives d'adaptation a été faite par Lyon pour rendre compte des résultats obtenus avec les métaux liquides.

Le calcul commence en utilisant le profil de vitesse adapté aux fluides en écoulement turbulent et qui peut être tiré de lois universelles comme celle de Nikuradse.

Le calcul se conduit de la même manière et donne le nombre de Nusselt à  $\varphi_p = Cte$ . Lyon calcule  $\varepsilon_M$  à partir de l'expression des vitesses universelles de Nikuradse. La moyenne porte sur la distance de l'axe à la paroi.

Après quoi, on pose :

$$\frac{K}{\lambda} = \frac{a + \varepsilon_T}{a} = 1 + \frac{\varepsilon_M}{v} Pr \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_M}$$

et 
$$\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_M} = \psi$$

où  $\psi$  est le rapport des diffusivités turbulentes de quantité d'énergie thermique et de quantité de mouvement :

$$\psi(r, Re, Pr) = \frac{\varepsilon_T(r, Re, Pr)}{\varepsilon_M(r, Re)}$$

Lyon arrive à une valeur du nombre de Nusselt bien représentée par :

$$Nu = 7 + 0,025 (\psi Pe)^{0,8}$$

Des améliorations semi-empiriques ont conduit à une autre expression fort employée (Subbotin) :

$$Nu = 5 + 0,025 (\psi Pe)^{0,8}$$

qui pallie partiellement le défaut de la formule de Lyon de surestimer le transfert pour les faibles turbulences.

### 9.3 Influence des conditions aux limites

En régime turbulent, nous n'avions pas précisé les conditions aux parois, qui pouvaient évoluer entre  $T_p = Cte$  et  $\varphi_p = Cte$ , en remarquant que le nombre de Nusselt était très peu sensible à ce type de changement pour des conditions par ailleurs identiques.

Il n'en est plus ainsi pour les métaux liquides et la figure 30 montre cette influence tout en illustrant ce qui a été dit pour les fluides ordinaires.

Le rapport  $\frac{Nu \text{ à } \varphi_p = Cte}{Nu \text{ à } T_p = Cte}$  pour un même nombre de Péclet est porté en ordonnée en fonction du nombre de Reynolds porté en abscisse (les courbes sont paramétrées avec le nombre de Prandtl).

On confirme *a posteriori* ce qui avait été dit à propos des fluides ordinaires. Pour les métaux liquides, on voit que les écarts de valeur du nombre de Nusselt peuvent atteindre 30 à 35 % et s'atténuent quand le nombre de Reynolds croît : cela est en accord avec les considérations générales développées plus haut, suivant lesquelles toutes les distinctions thermiques entre métaux liquides et fluides ordinaires doivent s'atténuer si  $Re \rightarrow \infty$ .

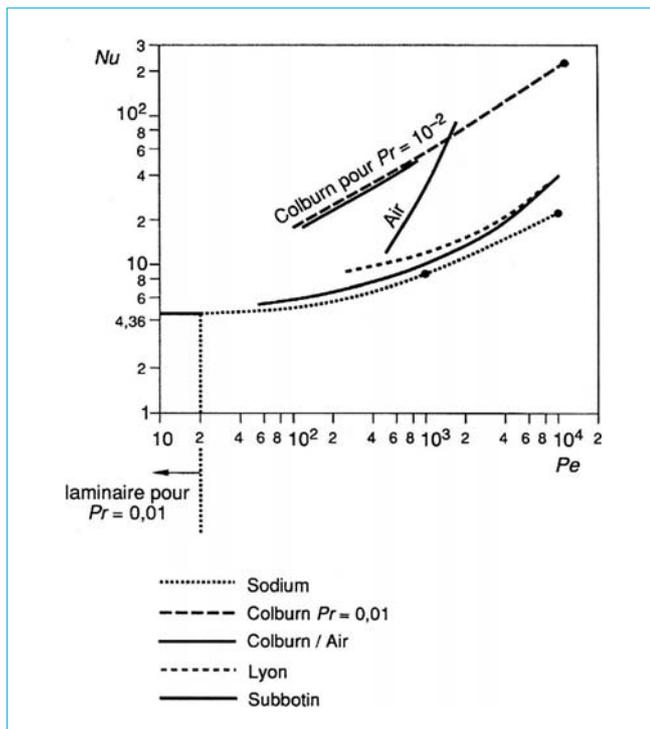


Figure 29 – Nombre de Nusselt en fonction du nombre de Péclet en régime turbulent pour le sodium liquide

Il ressort donc de cela que l'utilisateur devra choisir des formules différentes suivant qu'il travaille à densité de flux ou à température constante à la paroi et cela d'autant plus que la turbulence reste modérée. On trouvera ci-après des expressions utilisables pour d'autres géométries que le tube.

### 9.4 Diffusivité thermique turbulente

La diffusivité mécanique turbulente  $\epsilon_M$  ne pose, nous l'avons vu, aucun problème spécifique. Il s'agit ici d'établir des relations valables entre  $\epsilon_M$  et  $\epsilon_T$  (diffusivité thermique turbulente) puisque  $\epsilon_T \approx \epsilon_M$  ne convient plus. À ce point de vue, la figure 31 qui donne le rapport  $\epsilon_T/\epsilon_M$  en fonction de  $\epsilon_M/\nu$  pour des écoulements liquides ordinaires, d'une part, et de différents métaux liquides, d'autre part, est démonstrative. Les valeurs asymptotiques se rejoignent comme prévu. Il s'agit de valeurs moyennées sur le rayon.

Si l'on veut avoir une idée de la variation suivant la distance à la paroi, ce qui complique relativement les calculs, on regardera les courbes de la figure 32 donnant  $a/(a + \epsilon_T)$  pour un tube en fonction de cette distance, pour deux valeurs du nombre de Reynolds. On voit que, pour  $Re = 10^4$ ,  $\epsilon_T$  est encore inférieur à la diffusivité  $a = \lambda/\rho c_p$ , même sur l'axe, tandis que la valeur moyenne de  $\epsilon_T$  pour ce nombre de Reynolds excède  $a$  de 20 % environ. Pour  $Pr \approx 1$ , la valeur correspondante, à nombre de Reynolds identique, est de l'ordre de 10 fois  $a$ .

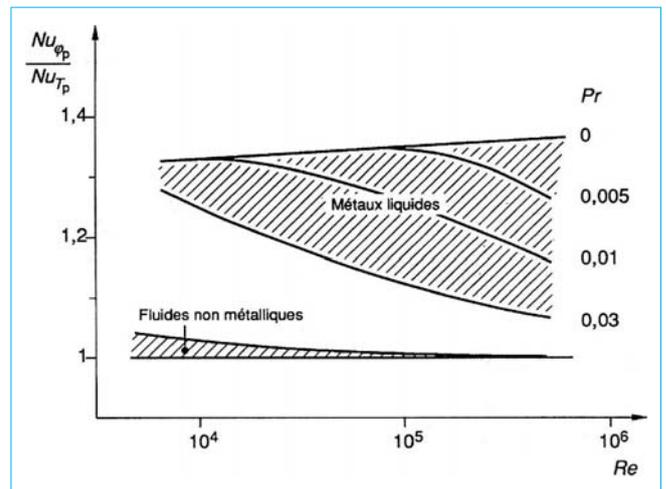


Figure 30 – Influence des conditions thermiques aux limites sur le nombre de Nusselt

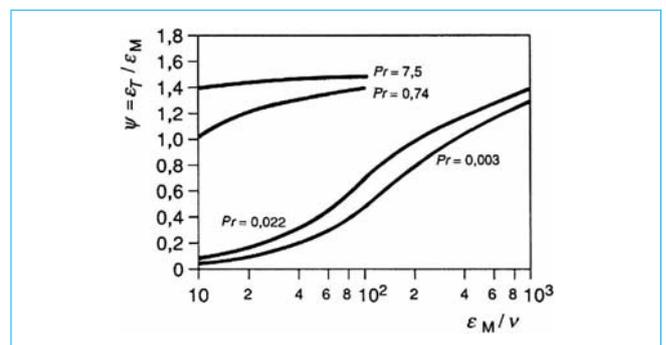


Figure 31 – Rapport des deux diffusivités turbulentes en fonction de  $\epsilon_M/\nu$

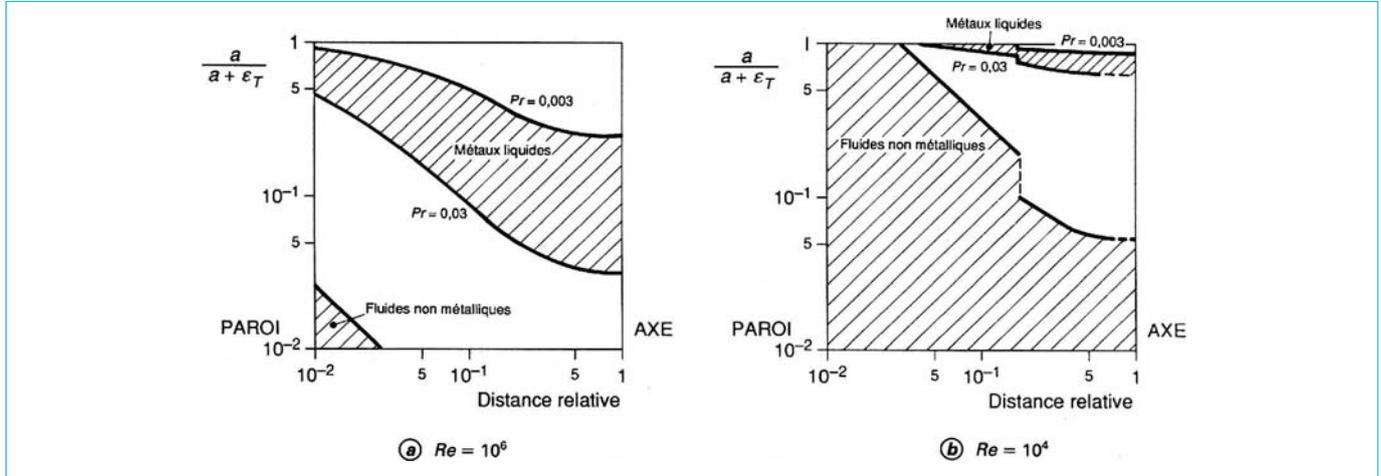


Figure 32 – Importance de  $\epsilon_T$  relativement à la diffusité thermique  $a$  en fonction de la distance adimensionnée à la paroi pour deux nombres de Reynolds

Ces courbes permettent, pour des calculs précis, d'introduire la valeur de  $\epsilon_T$  fonction du nombre de Reynolds et de la distance à la paroi dans les calculs.

Mais, le plus souvent, on se contente d'employer des formules semi-empiriques qui, cependant, rendent assez bien compte des coefficients d'échange en les surestimant quelque peu en général (§ 3).

**On retiendra des métaux liquides les quelques caractères essentiels suivants :**

- coefficient d'échange de l'ordre de 100 fois plus élevé que pour les liquides ordinaires en régime laminaire ; le nombre de Nusselt est constant pour tous les fluides pour une géométrie fermée donnée ; la définition  $Nu = \frac{hD}{\lambda} = Cte$  implique des  $h$  inversement proportionnels à  $\lambda$  pour une même valeur du nombre de Nusselt ;
- augmentation faible du coefficient d'échange pour des écoulements modérément turbulents, soit un moindre gain des avantages thermiques par rapport aux autres fluides quand on commence à sortir du régime laminaire en augmentant les vitesses par exemple ;
- comportement sans particularité sur le plan de la mécanique des fluides isothermes (en première approximation) ;
- possibilité de refroidir des surfaces en enlevant des densités de flux de l'ordre de  $4 \times 10^6 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$  ; actuellement, l'utilisation principale est celle de fluide caloporteur dans les réacteurs à neutrons rapides ;
- possibilité de porter les métaux liquides à haute température (jusqu'à 800 °C pour le sodium) sans pressurisation ;
- sur le plan des sujétions d'emploi, on remarque une grande variation des caractéristiques du transfert thermique des métaux alcalins avec de faibles doses d'impuretés dissoutes (oxygène, hydrogène, etc.) ; le choix des aciers des installations qui contiennent les métaux liquides à chaud est délicat si on veut éviter les corrosions ;
- revers, et conséquence de l'excellente conductivité thermique des métaux liquides : l'arrivée de sodium sur une surface métallique à température très différente engendre tout de suite des flux très importants, générateurs de différences transitoires de température, donc de contraintes thermiques différentielles élevées dans les matériaux solides du circuit. Ce fait est d'autant plus gênant que les aciers imposés par des considérations relatives à la corrosion ont un coef-

ficient de dilatation supérieur à celui des aciers ordinaires et une conductivité inférieure.

Bien entendu, ces considérations générales orientées vers le sodium, le lithium et les autres métaux alcalins caloporteurs restent valables pour les métallurgistes qui doivent calculer les interactions thermiques des métaux fondus avec les récipients.

Résumé des corrélations donnant le nombre de Nusselt pour des métaux liquides	
Régime turbulent Corrélation où $Pe = Re \cdot Pr$	Conditions thermiques et géométriques de validité
$Nu = 7 + 0,025 Pe^{0,8}$ $Nu = 7 + 0,625 Pe^{0,4}$ $Nu = 5 + 0,025 Pe^{0,8}$ $Nu = 5,85 + 0,000 34 Pe^{1,29}$	<b>tube</b> $\varphi_p = Cte$ $Re > 10^4$ <b>tube</b> $\varphi_p = Cte$ $Re > 10^4$ <b>tube</b> $T_p = Cte$ $Re > 10^4$
$Nu = 0,70 (7 + 0,025 Pe^{0,8}) \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^{0,53}$	<b>plaques parallèles</b> , l'une à $\varphi_p = Cte$ , l'autre à $\varphi_p = 0$ (1) <b>espace annulaire</b> régime turbulent $D_2$ et $D_1$ diamètres extérieur et intérieur $\varphi_p = Cte$ sur $D_1$ nombre de Nusselt sur $D_2$
<b>Note :</b> en régime laminaire, $Nu$ reste inchangé par rapport aux expressions classiques.	
(1) On remarquera que le cas de 2 plaques parallèles à $\varphi_p = Cte$ se ramène aisément par des considérations de symétrie au cas traité. Un espace d'épaisseur $\delta$ , où $\varphi_p = Cte$ sur les deux faces, comporte deux espaces égaux séparés par une zone fictive où $\varphi_p = 0$ .	

Notations et Symboles		
Symbole	Unité	Définition
$a$	$m^2/s$	diffusivité thermique
$A$	$m^2$	aire de la section droite d'une géométrie fermée
$A\ell$	%	allongement
$c$	$J/kg \cdot K$	capacité thermique massique
$c_p$ ou $c_V$	$J/kg \cdot K$	capacité thermique massique à pression constante ou à volume constant
CF		convection forcée
CN		convection naturelle
$d, D$	m	diamètre
$d_h, D_h$	m	diamètre hydraulique
$g$	$m/s^2$	accélération de la pesanteur
$h$	$W/m^2 \cdot K$	coefficient de transfert thermique par convection (conductance)
$H$	$W/m^2 \cdot K$	coefficient de transfert global (coefficient d'échange)
$H$	m	hauteur en convection naturelle
$L$	m	longueur d'une géométrie fermée où se produit un écoulement
$\ell, L$	m	longueur
$L_h$	m	longueur d'établissement hydraulique
$L_{th}$	m	longueur d'établissement thermique
$m$	kg	masse
$\dot{m}$	kg/s	débit-masse
$n$		normale à la paroi
$p$	$N/m^2$ ou Pa	pression
$P$	$W/m^3$	puissance thermique volumique
$p_e$	m	longueur du périmètre mouillé
$Q$	J	énergie, quantité de chaleur
$\dot{Q}$	kg/s	débit-masse
$r, R$	m	rayon
$r_h$	m	rayon hydraulique
$\mathcal{R}$		résistance conductive surfacique de passage ( $\mathcal{R} = \ell/\lambda$ pour une plaque plane)
$t$	s	temps
$T$	K ou °C	température
$T_M$	K ou °C	une température unique globalisant toute la répartition de température dans l'ensemble du fluide pour les géométries fermées (température de mélange)
$T_r$	K ou °C	température de référence
$T_\infty$	K ou °C	température loin du solide considéré pour les géométries ouvertes
$V(u, v, w)$	m/s	vitesse
$V_q$	m/s	vitesse de débit-masse
$x$	m	distance suivant l'axe de l'écoulement

Notations et Symboles		
Symbole	Unité	Définition
$x^+$		$\left. \begin{aligned} x^+ &= \frac{x}{R \cdot Pe_{D_h}} \\ x^* &= \frac{x}{D_h \cdot Pe_{D_h}} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{distances axiales} \\ \text{sans dimension} \end{array}$
$x^*$		
$\beta$	$K^{-1}$	$\beta = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$ coefficient d'expansion thermique
$\delta_M$	m	épaisseur de couche limite mécanique
$\delta_T$	m	épaisseur de couche limite thermique
$\delta$	m	distance entre deux plaques planes et parallèles (parfois écrite $2e$ ou $\ell$ )
$\varepsilon_M$	$m^2/s$	diffusivité mécanique turbulente
$\varepsilon_T$	$m^2/s$	diffusivité thermique turbulente
$\lambda$	$W/K \cdot m$	conductivité thermique
$\lambda_e$	$W/K \cdot m$	conductivité thermique équivalente
$\mu$	$kg/m \cdot s$	viscosité dynamique (coefficient de viscosité)
$\nu$	$m^2/s$	viscosité cinématique, diffusivité de matière
$\rho$	$kg/m^3$	masse volumique
$\tau_p$	Pa	effort tangentiel à la paroi rapporté à l'unité de surface
$\varphi$	$W/m^2$	flux surfacique
$\phi$	$W/m$	flux thermique linéique
$\phi_p$	$W/m^2$	flux thermique surfacique
$\Phi$	W	flux, puissance
$\psi$		rapport des diffusivités turbulentes
$Gr_\ell$		$Gr_\ell = \frac{g \beta \ell^3 \Delta T}{\nu^2}$ nombre de Grashof
$Gz$		$Gz = Re \cdot Pr \cdot \frac{D}{L}$ nombre de Graetz
$Nu_\ell$		$Nu_\ell = \frac{h \cdot \ell}{\lambda}$ nombre de Nusselt
$Nu_x(x)$		$Nu_x(x) = \frac{h(x) \cdot x}{\lambda}$ nombre de Nusselt local
$\overline{Nu}_\ell$ ou $Nu_m$		$\overline{Nu}_\ell = Nu_m = \frac{\bar{h} \cdot \ell}{\lambda}$ nombre de Nusselt moyen (les expressions $\overline{Nu}_\ell$ et $Nu_m$ sont équivalentes)
$Pe_\ell$		$Pe_\ell = \frac{V \cdot \ell}{a} = Re_\ell \cdot Pr$ nombre de Péclet
$Pr$		$Pr = \frac{\nu}{a} = \frac{\mu c_p}{\lambda}$ nombre de Prandtl

Notations et Symboles		
Symbole	Unité	Définition
$Ra_\ell$		$Ra_\ell = \frac{g \beta \ell^3 \Delta T}{a \nu}$ nombre de Rayleigh
$Ra_\ell^*$		$Ra_\ell^* = \frac{g \beta \ell^4 \varphi_D}{\lambda a \nu}$ nombre de Rayleigh modifié
$Re_\ell$		$Re_\ell = \frac{V \cdot \ell}{\nu}$ nombre de Reynolds
$Ri_\ell$		$Ri_\ell = \frac{g \beta \ell}{V^2} = \frac{Gr_\ell}{Re_\ell^2}$ nombre de Richardson

Indices	
e	entrée d'un tube
f	fluide
p	paroi
r	référence
s	solide ou sortie d'un tube (suivant le contexte)
1	affecté aux coordonnées $(x_1, y_1)$ d'un point où l'on calcule les transferts (cas des géométries ouvertes)

### Références bibliographiques

- [1] ROHSENOH (W.M.) et HARTNETT (J.P.). – *Handbook of heat transfer*. Mc Graw Hill Book Company (1973).
- [2] KNUDSEN (J.G.) et KATZ (D.L.). – *Fluid Dynamics and Heat Transfer*. Mc Graw Hill Book Company (1958).
- [3] JAKOB (M.). – *Heat Transfer*. John Wiley et Sons (1949).
- [4] KUTATELADZE (S.S.) et BORISHANSKY (V.M.). – *A concise Encyclopedia of Heat Transfer*. Pergamon Press (1966).
- [5] Mc ADAMS (W.H.). – *Transmission de la chaleur*. Dunod (1961).
- [6] GOSSE (J.). – *Guide thermique*. Dunod (1981).
- [7] SHAH (R.K.) et LONDON (A.L.). – *Laminar flow forced convection in ducts*. Advances in Heat Transfer. Supplement 1 (1978).
- [8] SPARROW (E.M.) et LIN (S.H.). – *The developing laminar flow and pressure drop in the entrance region of cumular ducts*. J. Basics Eng. 91, p. 345-54 (1969).
- [9] WIBULSWAS (P.). – *Laminar flow heat transfer in non circular ducts*. Ph. D. thesis - London University, London (1966).
- [10] WORSØE-SCHMIDT (P.M.). – *Heat transfer in the thermal entrance region of circular tubes and annular passages with fully developed laminar flow*. Int. J. Heat Mass Transfer, 10, p. 541-51 (1967).
- [11] LUNDBERG (R.E.), Mc CUEN (P.A.) et REYNOLDS (W.C.). – *Heat transfer in annular passages. Hydrodynamically developed laminar flow with arbitrarily prescribed wall temperatures or heat fluxes*. Int. J. Heat Mass Transfer, 6, p. 495-529 (1963).
- [12] KAY (J.M.). – *Introduction à la mécanique des fluides et à la transmission de la chaleur*. Dunod (1964).
- [13] CEBECI (T.) et BRADSHAW (P.). – *Physical and computational aspects of convective heat transfer*. Springer Verlag (1984).
- [14] KAYS (N.M.) et CRAWFORD (M.E.). – *Convective heat and mass transfer*. Mc Graw Hill Book Company (1980).
- [15] SCHLICHTING (H.). – *Boundary layer theory*. Mc Graw Hill Book Company (1960).
- [16] PLATTEN (J.K.) et LEGROS (J.C.). – *Convection in liquids*. Springer Verlag (1984).
- [17] COLBURN (A.P.). – Trans. AICHE 29 : 174 (1933).
- [18] LYON (R.N.). – *Liquid metals handbook*. Navexos P-733 (1952).
- [19] DITTUS (F.W.) et BOELTER (L.M.K.). – Univ. of Calif. Pubs Engr. 2, p. 443 (1930).
- [20] SEBAN (R.A.) et SHIMAZAKI (T.T.). – Trans. of ASME 73 : 803 (1951).
- [21] HILPERT (R.). – VDI -Forschungsheft - n° 355 (1932).
- [22] REIHER (H.). – Forschungsarb. a.d. Geb. d. Ingenieurives n° 269 (1925).
- [23] GRAETZ (L.). – Annalen d. Physik 18 (1883) 25 (1885).
- [24] MARTINELLI (R.C.) et al. – Trans. Am. Inst. Chem. Engrs. 38, p. 943 (1943).
- [25] KRAMERS (H.). – Physica 12 : 61 (1946).
- [26] CATTON (I.). – *Natural convection in enclosures*. 6<sup>e</sup> Congrès international sur le Transfert de Chaleur, Toronto, vol. 6 p. 13-31 (1978).
- [27] PETIT (J.P.). – *Convection naturelle*. Cours ECP.
- [28] RAITHYBY (G.D.) et HOLLANDS (G.T.). – *A general method of obtaining approximate solutions to laminar and turbulent free convection problems*. Advances in Heat Transfer vol. 11 (1975).
- [29] SHAH (R.K.). – *Thermal entry length solutions for the circular tube and parallel plates*. Proc. Natl. Heat Mass Transfer Conf., 3rd, Indian Inst. Techno., Bombay, Vol. I, Pap. n° HMT-11-75 (1975).
- [30] GRIGULL (U.) et TRATZ (H.). – *Thermischer Einlauf in ausgebildeter laminarer Rohrströmung*. Int. J. Heat and Mass Transfer Vol. 8, p. 669-78 (1965).
- [31] KAYS (W.M.). – *Numerical solutions for laminar-flow heat tranfer in circular tubes*. Trans. ASME 77 – p. 1265-74 (1955).
- [32] HORNBECK (R.W.). – *An all-numerical method for heat transfer in the inlet of a tube*. Am. Soc. Mech. Eng., Pap. 65 -WA/HT-36 (1965).
- [33] HEATON (H.S.), REYNOLDS (W.C.) et KAYS (W.M.). – *Heat transfer in annular passages. Simultaneous development of velocity and temperature fields in laminar flow*. Int. J. Heat Mass Transfer 7, p. 763-81 (1964).
- [34] SLEICHER (C.A.) et TRIBUS (M.). – Trans. ASME 79, p. 798 (1957).
- [35] SPARROW (E.M.), HALLMAN (T.M.) et SIEGEL (R.). – *Steady laminar heat transfer in a circular tube with prescribed wall heat flux*. Appl. Sci. Res., Sect. A7, p. 386-92 (1958).
- [36] SHAH (R.K.) et LONDON (A.L.). – *Laminar flow forced convection heat transfer and flow friction in straight and curved ducts – A summary of analytical solutions*. TR N° 75 Dep. Mech. Eng., Stanford University (1971).
- [37] SPARROW (E.M.) et LIN (S.H.). – *The developing laminar flow and pressure drop in the entrance region of annular ducts*. J. Basic Eng. 86, p. 827-34 (1964).
- [38] LUNDBERG (R.E.), REYNOLDS (W.C.) et KAYS (W.M.). – *Heat transfer with laminar flow in concentric annuli with constant and variable wall temperature and heat flux*. NASA Tech. Note TN. D-1972 (1963).
- [39] SHUMWAY (R.W.) et Mc ELIGOT (D.M.). – *Heated laminar gas flow in annuli with temperature – dependent transport properties*. Nucl. Sci. Eng. 46, p 394-407 (1971).
- [40] ATKINSON (B.), BROCKLEBANK (M.P.), CARD (C.C.H.) et SMITH (J.M.). – *Low Reynolds number developing flows*. AICHE J. 15, p. 548-53 (1969).
- [41] BROWN (G.M.). – *Heat or mass transfer in a fluid in laminar flow in a circular or flat conduit*. AICHE J. 6, p. 179-83 (1960).
- [42] SPARROW (E.M.), NOVOTNY (J.L.) et LIN (S.H.). – *Laminar flow of a heat-generating fluid in a parallel-plate channel*. AICHE J. 9, p. 797-804 (1963).

- [43] STEPHAN (K.). – *Wärmeübergang und Druckabfall bei nicht ausgebildeter Laminarströmung in Rohren und in ebenen Spalten*. Chem.-Ing.-Tech. 31, p. 773-78 (1959).
- [44] HWANG (C.L.) et FAN (L.T.). – *Finite difference analysis of forced-convection heat transfer in entrance region of a plate rectangular duct*. Appl. Sci. Res., Sect A13, p. 401-22 (1964).
- [45] SIEGEL (R.) et HOWELL (J.R.). – *Thermal radiation heat transfer*. Mc Graw Hill Book Company (1972).
- [46] TAINE (J.) et PETIT (J.P.). – *Transferts thermiques – Mécanique des fluides anisothermes*. Dunod (1989).
- [47] CHEN (T.S.), TIEN (J.P.) et ARMALY (B.F.). – *Natural convection on horizontal, inclined and vertical plates with variable surface temperature or heat flux*. Int. J. Heat. Mass Transfer. Vol 29, n° 10, p. 1465-78 (1986).
- [48] RUIZ (R.) et SPARROW (E.M.). – *Natural convection in V-shaped and L-shaped corners*. Int. J. Heat. and Mass Transfer. Vol. 30, n° 12, p. 2539-48 (1987).
- [49] SHARMA (G.K.) et SUKHATME (S.P.). – *Combined free and forced convection heat transfer from heated tube to a transverse air stream*. Journal of Heat Transfer p. 457-59, août 1969.
- [50] OOSTHUIZEN (P.H.) et MADAN (S.). – *Combined convective heat transfer from horizontal cylinders in air*. Journal of Heat Transfer, p. 194-6, fév. 1970.
- [51] OOSTHUIZEN (P.H.) et MADAN (S.). – *The effect of flow direction on combined convective heat transfer from cylinders to air*. Journal of Heat Transfer p. 240-2, mai 1971.
- [52] YOUNG (M.F.) et OZEL (T.). – *Mixed free and forced convection from a short vertical cylinder placed in a laminar horizontal flow*. Journal of Heat Transfer, p. 250-4, fév 1987.
- [53] CHEN (T.S.), ARMALY (B.F.) et RAMACHANDRAN (N.). – *Correlations for laminar mixed convection flows on vertical, inclined and horizontal flat plates*. Journal of Heat Transfer, p. 835-40, nov 1986.
- [54] RAMACHANDRAN (N.), ARMALY (B.F.) et CHEN (T.S.). – *Measurements of laminar mixed convection flow adjacent to an inclined surface*. Journal of Heat Transfer, p. 146-50, fév 1987.
- [55] ARMALY (B.F.), CHEN (T.S.) et RAMACHANDRAN (N.). – *Correlations for laminar mixed convection on vertical, inclined and horizontal flat plates with uniform surface heat flux*. Int. J. Heat Transfer, vol. 30, n° 2, p. 405-8 (1987).
- [56] CHEN (T.S.), ARMALY (B.F.) et ALI (M.M.). – *Turbulent mixed convection along a vertical plate*. Journal of Heat Transfer, p 251-3, fév 1987.
- [57] RAMACHANDRAN (N.), ARMALY (B.F.) et CHEN (T.S.). – *Correlations for laminar mixed convection in boundary layers adjacent to inclined, continuous moving sheets*. Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 30, n° 10 p. 2196-9 (1987).
- [58] MÉTAIS (B.) et ECKERT (E.R.G.). – *Forced, mixed and free convection regimes*. Journal of Heat Transfer, vol. 86, p. 295, (1964).
- [59] SWANSON (L.W.) et CATTON (I.). – *Surface renewal theory for turbulent mixed convection in vertical ducts*. Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 30, n° 11, p. 2271-9 (1987).
- [60] DEPEW (C.A.) et AUGUST (S.E.). – *Heat transfer due to combined free and forced convection in a horizontal and isothermal tube*. Journal of Heat Transfer p. 380-4, nov. (1971).
- [61] MORCOS (S.M.) et BERGLES (A.E.). – *Experimental investigation of combined forced and free laminar convection in horizontal tubes*. Journal of Heat Transfer, p. 212-9, mai 1975.